随机过程基础：习题与解答

应坚刚

2016 年 11 月 30 日

第一章: 概率论基础

§1.1 习　　题

1. 设$\mathscr{A}$ 是原子的集合, 那么$|\mathscr{F}| = 2^{|\mathscr{A}|}$. 原子就是不含有可测真子集的非空可测集.

2. 举例: $\mathscr{F}_n = \sigma(\{1\}, \cdots, \{n\})$, 那么$\bigcup_n \mathscr{F}_n$ 可数, 不可能是σ-代数. 第二部分: (徐清与赵敏智提供了证明, 但都不够直观, 下面的证明比较直观, 我一直认为证明应该类似于前面的反例, 但是没有成功, 等我看到赵敏智证明中的$\mathscr{H}_n$ 的定义突然有思路了.)

I shall split it as several parts.

claim 1. there exists a disjoint sequence $\{F_n\}$ such that $F_n \in \mathscr{F}_n \setminus \mathscr{F}_{n-1}$ for each n. The proof is easy. Set

$$\mathscr{H}_n := \mathscr{F}_n \cap \sigma(F_1, F_2, \cdots)$$

as σ-algebra on $(\bigcup_n F_n)$ and then $F_n \in \mathscr{H}_n \setminus \mathscr{H}_{n-1}$. It suffices to prove that $\bigcup_n \mathscr{H}_n$ is not a σ-algebra. Since $A \in \sigma(F_1, F_2, \cdots)$ if and only if there is a unique $S \subset \mathbf{N}$ such that $A = \bigcup_{i \in S} F_i$, we may assume that Ω is $\mathbf{N}$, $\mathscr{H}_n$ is a strictly increasing sequence of σ-algebras on $\mathbf{N}$, and for each n, $\{n\} \in \mathscr{H}_n \setminus \mathscr{H}_{n-1}$.

claim 2. for each n, any finite subset of

$$\{n+1, n+2, \cdots, \}$$

is not in $\mathscr{H}_n$.

Proof. Suppose that this is not true. There exists $0 < k_1 < \cdots < k_j$ such that

$$\{n+k_1, \cdots, n+k_j\} \in \mathscr{H}_n.$$

Then it is also in $\mathscr{H}_{n+k_1}$ and then $\{n+k_2, \cdots, n+k_j\} \in \mathscr{H}_{n+k_1}$. Hence recursively $\{n+k_j\} \in \mathscr{H}_{n+k_{j-1}}$, which is a contradiction.

claim 3. for $k > n$, there exists an atom in $\mathscr{H}_n$ containing $\{k\}$.

Proof. Define

$$a := \inf\{\sum_{i \in I} i^{-2} : k \in I, I \in \mathscr{H}_n\}.$$

Since $\{I \in \mathscr{H}_n : k \in I\}$ is closed under countable operation, there exists $S \in \mathscr{H}_n$ with $k \in S$ such that $a = \sum_{i \in S} i^{-2}$. Then S is the atom in $\mathscr{H}_n$ containing $\{k\}$.

claim 4. There exists a subsequence $\{k_n\}$ such that for each n, any proper subset of $\{k_{n+1}, k_{n+2}, \cdots\}$ is not in $\mathscr{H}_{k_n}$.
Proof. Set $\bar{S} = S \setminus \{\min S\}$ for $S \subset \mathbf{N}$. Let $S_1 = \mathbf{N}$ and S_2 the atom in $\mathscr{H}_1$ containing $\min \bar{S}_1 = 2$. Since $\bar{S}_1 \in \mathscr{H}_1$, $S_2 \subset \bar{S}_1$. By claim 2, S_2 is infinite. Then $S_2 \in \mathscr{H}_{\min S_2}$ and then $\bar{S}_2 \in \mathscr{H}_{\min S_2}$. Let S_3 be the atom in $\mathscr{H}_{\min S_2}$ containing $\min \bar{S}_2$. It follows that $S_3 \subset \bar{S}_2$. By claim 2, S_3 is infinite. Recursively we have

$$S_1 \supset \bar{S}_1 \supset S_2 \supset \bar{S}_2 \supset S_3 \supset \bar{S}_3 \supset \cdots S_n \supset \bar{S}_n \supset S_{n+1} \supset \cdots$$

satisfying that for any n, S_{n+1} is the atom in $\mathscr{H}_{\min S_n}$ containing $\min \bar{S}_n$. Then $k_n := \min S_n = \min S_{n-1}$ is what we want.
Proof. Let

$$\mathscr{H}'_n = \mathscr{H}_{k_n} \cap \{k_1, k_2, \cdots\}.$$

Then $\mathscr{H}'_n = \sigma(\{k_1, \cdots, k_n\}$ which is finite and it follows that $\bigcup_n \mathscr{H}'_n$ is countable and hence not a σ-algebra. This implies that $\bigcup_n \mathscr{H}_n = \bigcup_n \mathscr{H}_{k_n}$ is not either.
3. $\mathscr{B}(\mathbf{R}) = \sigma(\{(-\infty, x) : x \in Q\})$, 因此它最多与实数等势, 而Lebesgue 可测集全体是与实数的幂集等势的.
5. 取一列不交的$A_n \in \mathscr{F}_0$, 且$\bigcup A_n \in \mathscr{F}_0$, 令$C_n = \bigcup_n^\infty A_i$, 那么$C_n \in \mathscr{F}_0$ 且$\lim C_n = \emptyset$, 因此$\mu(\bigcup A_i) = \sum_1^n \mu(A_i) + \mu(C_{n+1})$, 取极限.
6. (2) 若有$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, 要验证$\mu(A_1) = \mu(A_2)$. 设$N'_i \in \mathscr{F}$, $N_i \subset N'_i$, $\mu(N'_i) = 0$. 记$N_0 = N_1 \cup N_2$, $N'_0 = N'_1 \cup N'_2$, 则$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cup N'_1) \le \mu(A_1 \cup N'_0) = \mu(A_2 \cup N'_0) = \mu(A_2)$, 推出$\mu(A_2) = \mu(A_1)$.
7. (1) μ^* 的定义是

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(B_n) : B_n \in \mathscr{F}, A \subset \bigcup B_n\}.$$

因此$\mu^* \le \mu^{**}$. 反之对任何$\epsilon > 0$,

$$\mu^*(A) + \epsilon \ge \sum \mu(B_n) \ge \mu(\bigcup B_n) \ge \mu^{**}(A).$$

(3) 由于$\mu(\Omega) < \infty$, 故$\mu_*(A) = \mu(\Omega) - \mu^*(A^c)$.
$\Leftarrow$: 要证对任何$E \subset \Omega$, 有$\mu^*(E) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$. 不妨设左边有限, 对任何$\epsilon > 0$, 存在$B \in \mathscr{F}$, $\mu^*(E) + \epsilon \ge \mu(B)$. 因$\mu^*(\Omega) < \infty$, 故存在$A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ 使得$A_1 \subset A \subset A_2$ 且$\mu(A_2 \setminus A_1) < \epsilon$. 则

$$\mu^*(E) + \epsilon \ge \mu(B) = \mu(B \cap A_2) + \mu(B \setminus A_2)$$

$$\geq \mu^*(E\cap A)+\mu(B\setminus A_1)-\epsilon$$
$$\geq \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\setminus A)-\epsilon.$$

$\Rightarrow$: 显然$\mu^*(A)\geq\mu_*(A)$. 反之, 如果$A\in\mathscr{M}$, 则$\mu(\Omega)\geq\mu^*(A)+\mu^*(A^c)$. 推出$\mu_*(A)\geq\mu^*(A)$.
8. 单调类定理: 对任何$E\in\mathscr{F}$, 作集类$[E]:=\{F\in\mathscr{F}:E\cup F,E\setminus F,F\setminus E\in\mathscr{F}\}$. 那么$[E]$ 是单调类. 如果$E\in\mathscr{A}$, 那么$\mathscr{A}\subset[E]$, 推出$m(\mathscr{A})\subset[E]$, 这里$m(\mathscr{A})$ 表示$\mathscr{A}$ 生成的单调类. 这意味着如果$F\in m(\mathscr{A})$, 那么$\mathscr{A}\subset[F]$, 又推出$m(\mathscr{A})\subset[F]$. 也就是说$m(\mathscr{A})$ 对并与差运算封闭, 因此, 它是σ-代数, 故而$\sigma(\mathscr{A})\subset m(\mathscr{A})\subset\mathscr{F}$.
10. 一个无限的σ-代数其原子的个数肯定是无限多个.
11. $\Rightarrow$: 如果$A\supset B$, 那么$A\setminus B=(A^c\cup B)^c$. 如果$A_n$ 递增, 那么$\lim A_n=\bigcup(A_n\setminus A_{n-1})$. $\Leftarrow$: 因为$\omega\in\mathscr{A}$, 故它对补封闭. 再证$\mathscr{A}$ 对不交并封闭. 设$A,B\in\mathscr{A}$, 不交. 则$A\cup B=(A^c\setminus B)^c$.
12. (1) 因为连续函数一定是Borel 可测的. (2) 只需证明当Ω 是度量空间时, $\mathscr{A}(\Omega)$ 包含所有开集或者闭集. 设G 是闭集, 则$x\in G$ 当且仅当$d(x,G)=0$. 令$f(x):=d(x,G)$. 则$G=\{x:d(x,G)=0\}$.
15. 设$x\in[-1,1]$,

$$\lambda\xi^{-1}([-1,x])=\lambda(\{\theta\in[0,2\pi]:\sin\theta\leq x\})=2\arcsin x.$$

16. 只要证明存在区间I 使得

$$\mu(I)<\infty$$

就可以了. 取可测集E 使得$0<\mu(E)<\infty$, 取非负紧支集连续函数f 使得$\int f(x)dx=1$. 那么由平移不变性

$$\begin{aligned}\mu(E)&=\int\int 1_E(x)f(y)\mu(dx)dy\\&=\int\int 1_E(x+y)f(y)\mu(dx)dy\\&=\int 1_E*f(x)\mu(dx),\end{aligned}$$

但是$g=1_E*f$ 是非负连续函数. 也就是说存在非负非平凡连续函数g 使得$\mu(g)<\infty$.
17. 证明$\mathbb{P}([0,1/4])=1/4$. 其它类似. 首先由测度限制

$$\mathbb{P}([0,1/2])+\mathbb{P}([0,1/4]\cup[1/2,3/4])$$

$$= \mathbb{P}([0,1/4]) + \mathbb{P}([0,3/4]) = 2\mathbb{P}([0,1/4]) + \mathbb{P}([1/4,3/4]).$$

由条件得$\mathbb{P}([0,1/4]) = 1/4$.

18. (1) 由Jordan 分解推出. (2) 显然这样的测度如果存在必唯一. 令$\mu \vee \nu := 1_D \cdot \nu + 1_{D^c} \cdot \mu$. 显然它满足(a), 另外对任何$A$, $\mu \vee \nu(A) = \nu(D \cap A) + \mu(D^c \cap A) \leq k(D \cap A) + k(D^c \cap A) = k(A)$, 因此(b) 满足.

19. 设$f \in L^1(\mathbf{R}, \mu)$, 则对任何$\epsilon > 0$, 存在$N$ 使得$\mu(|f 1_{\{|x|>N\}}|) < \epsilon$. 而$f 1_{\{|x|>N\}}$ 可以由简单函数逼近, 所以我们只需证明示性函数可以被连续函数逼近. 对任何测度有限的Borel 集B, 与$\epsilon > 0$, 存在开集G 与闭集F, 使得$F \subset B \subset G$ 且$\mu(G \setminus F) < \epsilon$. 定义

$$f(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}$$

那么f 连续, $f|_G = 0$, $f|_F = 1$ 且$\mu(|1_B - f|) < \epsilon$.

20. 实际上证明

$$\mathscr{F} \subset \bigcup_{J \subset I} \sigma(\{\xi_i : i \in J\}),$$

其中J 跑遍所有可列子集. 这只需验证右边是σ-代数就够了.

21. (参考严加安的测度论讲义) 显然证明第二句话就够了. Put $\mu = \sum_n \mathbb{P}_n / 2^n$, 那么$\mu$ 是概率测度, 且$\mathbb{P}_n \ll \mu$. 定义$d(A,B) = \mu(A \Delta B)$, $A, B \in \mathscr{F}$. 那么$(\mathscr{F}, d)$ 是完备度量空间, 因为$\{1_A : A \in \mathscr{F}\}$ 是$L^1(\mu)$ 中的闭集. 设$a > 0$, 令

$$L_j = \{A \in \mathscr{F} : \forall n, m >\geq j, |\mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}_m(A)| < a\},$$

由于函数$A \mapsto \mathbb{P}_n(A)$ 在$\mathscr{F}$ 上连续, 故L_j 是闭集. 由条件知$\mathscr{F} = \bigcup_j L_j$. 由Baire 纲定理推出, 某$L_j$ 有内点A. 即存在$h > 0$ 使得$\{B : \mu(B \Delta A) < h\} \subset L_j$. 由绝对连续性, 存在$\delta > 0$ 使得$\mu(C) < \delta$ 蕴含$\mathbb{P}_i(C) < a$, $1 \leq i \leq j$. 那么对$n \geq j$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(C) &= \mathbb{P}_n(A \cup C) - \mathbb{P}_n(A) + \mathbb{P}_n(A) - \mathbb{P}_n(A \setminus C) \\
&\leq |\mathbb{P}_n(A \cup C) - \mathbb{P}_j(A \cup C)| + |\mathbb{P}_j(A \cup C) - \mathbb{P}_j(A)| + |\mathbb{P}_j(A) - \mathbb{P}_n(A)| \\
&+ |\mathbb{P}_n(A \setminus C) - \mathbb{P}_j(A \setminus C)| + |\mathbb{P}_j(A \setminus C) - \mathbb{P}_j(A)| + |\mathbb{P}_j(A) - \mathbb{P}_n(A)| \\
&\leq 6a.
\end{aligned}$$

即推出$B_k \downarrow \emptyset$ 蕴含$\sup_n \mathbb{P}_n(B_k) \downarrow 0$. 实际上第一句话与第二句话等价.

(另一种证明: 赵敏智提供) Let A_n decrease to empty set. We need to show $\lim_k \lim_n \mathbb{P}_n(A_k) = 0$. Suppose that $\lim_k \lim_n \mathbb{P}_n(A_k) = c > 0$. Then when k large enough,

$$9c/8 > \lim_n \mathbb{P}_n(A_k) \geq c.$$

There exist n_1 and k_1 such that $9c/8 > \mathbb{P}_{n_1}(A_{k_1}) > 7c/8$. Then there exists $k_2 > k_1$ such that $\mathbb{P}_{n_1}(A_{k_2}) < c/8$. There exists $n_2 > n_1$ such that

$$9c/8 > \mathbb{P}_{n_2}(A_{k_2}) > 7c/8.$$

This procedure gives two sequences $\{n_i\}$ and $\{k_i\}$ satisfying

$$9c/8 > \mathbb{P}_{n_i}(A_{k_i}) > 7c/8,\ \mathbb{P}_{n_i}(A_{k_{i+1}}) < c/8.$$

Therefore we may assume that $\{\mathbb{P}_n\}$ and $\{A_k\}$ satisfies

$$9c/8 > \mathbb{P}_n(A_n) > 7c/8,\ \mathbb{P}_n(A_{n+1}) < c/8.$$

Set

$$A := \bigcup_{n\geq 1}(A_{2n-1}\setminus A_{2n}).$$

Then

$$\mathbb{P}_{2n-1}(A) \geq \mathbb{P}_{2n-1}(A_{2n-1}\setminus A_{2n}) \geq 7c/8 - c/8 = 6c/8$$

and

$$\mathbb{P}_{2n}(A) \leq \mathbb{P}_{2n}(A_1\setminus A_{2n}) + \mathbb{P}_{2n}(A_{2n+1}) \leq 9c/8 - 7c/8 + c/8 = 3c/8.$$

This contradicts to the existence of limit $\lim_n \mathbb{P}_n(A)$.

§1.2 习　题

2. 利用Dynkin 引理证明对任何$A\in\sigma(\mathscr{A})$, 有$1_A\in\mathscr{H}$.
3. $\Leftarrow$: 显然. $\Rightarrow$: 如果$\xi = 1_A$, 那么$A\in\sigma(\eta)$, 也就是说存在Borel 集B 使得$A = \eta^{-1}(B)$, 因此$\xi = 1_A = 1_B(\eta)$.
4. 在定理1.2.5 中已经证明.
5. (1) 由定理1.2.5 推出. 也可以利用表示定理. 定义$\phi(f) := \langle f,\nu\rangle$, $f\in L^2(\lambda)$. 那么$|\phi(f)|\leq \|f\|_{L^2(\lambda)}$, 因此存在$g$. (2) $\nu_s(B^c) = 0$. $\nu(B) = \int_B gd\mu + gd\nu = \mu(B) + \nu(B)$, 因此$\mu(B) = 0$. 对任何$D$, $\mu(D) = 0$. $\int f(1-g)d\nu = \int fgd\mu$. 令$f = 1_D$, 那么$\int_D(1-g)d\nu = 0$, 因此$\nu_a(D) = \nu(D\cap A) = 0$. (3) $(1-g)\cdot\nu_a = (1-g)\cdot\nu = g\cdot\mu$.
6. (1) 不妨设$\Omega = [0,1]$, 令$f(x) := \mathbb{P}(A\cap[0,x])$, 这是连续函数. (2) 存在$A_1\subset A$ 使得$0 < \mathbb{P}(A_1) < \mathbb{P}(A)$. 取$A_1$ 与$A\setminus A_1$ 测度小者, 继续这个过程. 其实存在A 的递减可测子集列A_n 满足$\mathbb{P}(A_n) < 1/n$. (3) 先设$\mu(A) < +\infty$. A 的可测子集族$\mathscr{A}$ 称为串, 如果(a) $\mathscr{A}\supset\{A_n\}$, 其中$A_n$ 如上; (b) $\mathscr{A}$ 中的任何两个集合A_1, A_2, 或

者$A_1 \subset A_2$ 或者$A_2 \subset A_1$ (忽略μ-零测集). 由Zorn 引理, 取一个极大的串$\mathscr{A}$, 我们证明$\{\mathbb{P}(B) : B \in \mathscr{A}\}$ 取遍$[0, \mathbb{P}(A)]$ 中的所有值. 令

$$a = \sup\{\mathbb{P}(B) : B \in \mathscr{A}, \mathbb{P}(B) \le x\},$$
$$b = \inf\{\mathbb{P}(B) : B \in \mathscr{A}, \mathbb{P}(B) \le x\}.$$

首先上面上(下)确界在$\mathscr{A}$ 中可以得到. 因为存在B_n 使得$\mathbb{P}(B_n) \uparrow a$, 由于$\mathscr{A}$ 是个串, 故B_n 递增, 则$\bigcup B_n \in \mathscr{A}$ 且$\mathbb{P}(\bigcup B_n) = a$. 设$\mathbb{P}(A'') = b, \mathbb{P}(A') = a$, 如果$a < x < b$, 那么取$0 < c < b - a = \mathbb{P}(A'' \setminus A')$, 存在$B' \subset A'' \setminus A'$ 使得$0 < \mathbb{P}(B') < c$, 那么$\mathbb{P}(A') < \mathbb{P}(A' \cup B') < \mathbb{P}(A'')$, 所以把$A' \cup B'$ 放在$\mathscr{A}$ 中仍然是一个串, 与$\mathscr{A}$ 的极大性矛盾. 最后需要证明如果$\mu(A) = +\infty$, 那么存在A 的可测子集A' 使得$x < \mu(A') < +\infty$. 事实上, A 的可测子集族$\mathscr{A}$ 称为一个串, 如果$\mathscr{A}$ 中的集合测度有限且任何两个集合有包含关系(忽略零测集不计). 串的全体满足Zorn 引理的条件, 因此有个极大串, 记为$\mathscr{A}$. 如果$\mathscr{A}$ 中有测度大于x 的集合, 那么证完. 不然, $b := \sup\{\mu(B) : B \in \mathscr{A}\} \le x$, 由可列可加性, 存在$B \in \mathscr{A}$ 使得$\mu(B) = b$. 那么$\mu(E \setminus B) = +\infty$. 存在$B' \subset E \setminus B$ 使得$0 < \mu(B') < +\infty$. 定义$A' = B \cup B'$, 那么A' 包含了$\mathscr{A}$ 中的所有集合, $\mu(A') > b$. 因此$\mathscr{A} \cup \{A'\}$ 也是一个串, 与$\mathscr{A}$ 的极大性矛盾.

另一种方法(赵敏智提供): 只要能够证明下面的断言就够了: 对任何测度有限的集合A, 与任何$\epsilon > 0$, A 可以写为有限个测度不超过ϵ 的不交可测集合的并. 事实上, 定义

$$\mu_\epsilon(B) = \sup\{\mu(B') : B' \subset B, 0 < \mu(B') \le \epsilon\}.$$

由(2)推出$\mu(B) > 0$ 蕴含$\mu_\epsilon(B) > 0$. 存在$A_1 \subset A$, 使得$\mu_\epsilon(A)/2 < \mu(A_1) \le \epsilon$. 如果$\mu(A \setminus A_1) > \epsilon$. 存在$A_2 \subset A \setminus A_1$ 使得$\mu(A \setminus A_1)/2 < \mu(A_2) \le \epsilon$. 继续, 得到$\{A_n\}$, 满足$A_n \subset A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$, 且

$$\mu_\epsilon(A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)/2 < \mu(A_n) \le \epsilon.$$

令$B = \bigcup A_n$. $\mu(B) \le \mu(A)$, 且

$$\mu_\epsilon(A \setminus B) \le \mu_\epsilon(A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \le 2\mu(A_n) \longrightarrow 0,$$

因此$\mu(A \setminus B) = 0$. 存在n 使得$\mu(\bigcup_{i>n} A_i) \le \epsilon$, 故$A$ 划分为$A_1, \cdots, A_n, \bigcup_{i>n} A_i$.

8. (参考严加安的测度论讲义) 令$\mathscr{H}_+^*$ 是指$\mathscr{H}$ 中的非负递增列的极限全体. 定义$I^*(f) = \sup\{I(g) : g \in \mathscr{H}, f \ge g \ge 0\}$. 取$\mathscr{H}$ 中递增收敛于f 的非负函数

列f_n, 显然$I^*(f) \geq \lim_n I(f_n)$, 反过来, 对任何$g \in \mathscr{H}$, $0 \leq g \leq f$, 有$f_n \wedge g \uparrow g$, 故$\lim_n I(f_n) \geq \lim_n I(f_n \wedge g) = I(g)$. 因此$I^*(f) = \lim_n I(f_n)$. $I^*(f)$ 与f_n 的选择无关.

9. $\Rightarrow$: 反证法, 存在A_n 使得$\mu(A_n) < n^{-2}$, $\nu(A_n) \geq \epsilon$. 令$A = \bigcap_n \bigcup_{k>n} A_k$, 不难验证$\mu(A) = 0$, 但$\nu(A) > \epsilon$.

10. 存在不交的Ω_n 使得$\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ 且$0 < \mu(\Omega_n) < \infty$. 令$f = \sum_n \frac{1}{2^n \mu(\Omega_n)} 1_{\Omega_n}$.

附加题: 设Ω 是不可数集, $\mathscr{F}$ 是Ω 的单点子集生成的σ-代数. 证明: 对角线$\{(\omega, \omega) : \omega \in \Omega\} \notin \mathscr{F} \times \mathscr{F}$

定义$\mathscr{F}$ 上的测度μ, 如果A 可列, $\mu(A) = 0$, 如果A^c 可列, $\mu(A) = 1$. 那么$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 是概率空间. 反证法, 如果对角线D 可测, 那么Fubini 定理可用. 这样容易计算1_D 的累次积分是零. 再算$\mu \times \mu(D)$, 覆盖D 的任何矩形可测集列中必然有一个矩形是两个不可列集的乘积, 因此$\mu \times \mu(D) = 1$. 矛盾.

§1.3 **习　　题**

2. 因为F 连续, $F^{-1}(x) = \inf\{y : F(y) \leq x\} = \inf\{y : F(y) = x\}$, 故$F(F^{-1}(x)) = x$, 因此$\mathbb{P}(F(\xi) \leq x) = \mathbb{P}(\xi \leq F^{-1}(x)) = x$.

4. F 满足$(\hat{F}(x/\sqrt{n}))^n = \hat{F}(x)$.

18. (2) 设$a_n > 0$, $\sum_n a_n = 1$, 证明: $\{\sum_{n \in A} a_n : A \subset \mathbf{N}\}$ 是闭集. In fact, put $\mu(\{n\}) = 2^{-n}$ and $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$ for $A, B \subset \mathbf{N}$, $g(A) = \sum_{n \in A} a_n$. Then d is a metric on $2^{\mathbf{N}}$. Two things need to check: (1) $(2^{\mathbf{N}}, d)$ is compact; 用对角线法证明: 对任何序列, 取第一分量都是0(或1,总是可以)的子列, 再其中取第二个分量都是0(或1)的子列, 继续, 然后拿出对角线列, 其n 个分量从第n 个元素后都是一样的, 所以它收敛. (2) g is continuous. We know that the image of compact set under continuous mapping is compact. That completes the proof. 一般地, $\Omega = A \cup A^c$, $\mathbb{P}$ 在A 上离散, 在A^c 上非原子. 那么$\mathbb{P}$ 的值域等于$\{\mathbb{P}(B) : B \subset A\} + \{\mathbb{P}(B) : B \subset A^c\}$ 是闭集的和.

25. 先固定ω_2 对ω_1 取期望, $\mathbb{E}\xi\eta - \xi(\omega_2)\mathbb{E}\eta - \eta(\omega_2)\mathbb{E}\xi + \xi(\omega_2)\eta(\omega_2) \geq 0$, 然后再对$\omega_2$ 取期望, 得$\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta \geq 0$.

26. $\xi = \sum_n 1_{A_n}$, $\mathbb{E}\xi = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$, 由Borel-Cantelli 引理, $\mathbb{E}\xi = +\infty$ 蕴含着$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$, 即$\mathbb{P}(\xi = +\infty) = 1$.

27. $\mathscr{F} = \sigma\left(\bigcup_n \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)\right)$.

28. (赵敏智提供) 设$\mathscr{A}$ 是尾σ-代数. 令$\xi_n = 1_{A_n}$,

$$\tilde{\mathscr{A}} := \{\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} \{\xi_k = a_k\} : a_k \in \{0, 1\}\}.$$

那么(1) 由条件推出$\tilde{\mathscr{A}}$ 中所有集合概率为零; (2) 所有集合互不相交, 其并为Ω, 因此$\tilde{\mathscr{A}}$ 不可列; (3) $\tilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}$ 且$\tilde{\mathscr{A}}$ 中的集合是$\mathscr{A}$ 中的原子.

It is easy to verify that if $A \in \sigma(X_1, \cdots, X_n, \cdots)$, then $X_n(\omega) = X_n(\omega')$ for all n and $\omega \in A$ implies that $\omega' \in A$.

定义$\omega \sim \omega'$, 如果存在k 使得$n \geq k$ 时$\xi_n(\omega) = \xi_n(\omega')$. 如果$A \in \mathscr{A}$, $\omega \sim \omega'$, 那么$\omega \in A$ implies $\omega' \in A$. (3) follows.

设$\mathscr{A}$ 是可列生成的, $\mathscr{A} = \sigma(B_1, \cdots, B_n, \cdots)$. Let $B = (\bigcup B_n)^c$. Then it is easy to check that B is an atom in $\mathscr{A}$. By Kolmogorov 0-1 law, we may assume that $\mathbb{P}(B_n) = 0$. Then there exists infinite many elements in $\tilde{\mathscr{A}}$ which are contained in B. This contradicts with the fact that B is an atom in $\mathscr{A}$.

§1.4 习　题

1. 由$\mathbb{E}\sum|\xi_n| < \infty$, 因此$\sum\xi_n$ 绝对收敛. 再利用控制收敛定理$\mathbb{E}\xi = \sum\mathbb{E}\xi_n$.

2. $\mathbb{E}|\xi| = \sum_n \mathbb{E}(|\xi|; n \leq |\xi < n+1)$, $n\mathbb{P}(n \leq |\xi| < n+1) \leq \mathbb{E}(|\xi|; n \leq |\xi| < n+1) < (n+1)\mathbb{P}(n \leq |\xi| < n+1)$, 但是$\sum_1^\infty n\mathbb{P}(n \leq |\xi| < n+1) = \sum_1^\infty \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(n \leq |\xi| < n+1) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n \geq k} \cdots = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(|\xi| \geq k)$.

3. 令$\xi = \sum 1_{A_n}$, 那么$G = \{\xi \geq m\}$, 然后Chebyshev 不等式.

4. (1) 先证明一个命题: 如果$\{\xi_n\}$ 被可积的η 控制且$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$, 那么$\xi_n \xrightarrow{L^1} \xi$. 实际上,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\xi_n - \xi| &\leq \epsilon + \mathbb{E}(|\xi_n - \xi|; |\xi_n - \xi| > \epsilon) \\ &\leq \epsilon + 2\mathbb{E}(\eta; |\xi_n - \xi| > \epsilon),\end{aligned}$$

然后应用η 的绝对连续性.

(2) 显然$(\xi - \xi_n)^+ \leq \xi$ 且$(\xi - \xi_n)^+ \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, 因此$(\xi - \xi_n)^+ \xrightarrow{L^1} 0$.

(3) 由(2) 和条件, $\mathbb{E}|\xi - \xi_n|^- = \mathbb{E}[(\xi - \xi_n)^+ - (\xi - \xi_n)] = \mathbb{E}(\xi - \xi_n)^+ - (\mathbb{E}\xi - \mathbb{E}\xi_n)$ 趋向于0.

5. 设F_n 在D 上收敛, 记$\bar{F}(x) := \lim F_n(x)$, $x \in D$. 用F 表示$\bar{F}$ 的右连续化, 即

$$F(x) := \lim_{y \in D, y \downarrow\downarrow x} \bar{F}(y), \ x \in \mathbf{R}.$$

现在我们证明F_n 弱收敛于F. 给定$x \in \mathbf{R}$, 取$x_1 < x < x_2$, $x_1, x_2 \in D$, 显然$\bar{F}(x_1) \leq F(x) \leq \bar{F}(x_2)$, 那么$F_n(x_1) \leq F_n(x) \leq F_n(x_2)$, 故

$$\bar{F}(x_1) = \lim F_n(x_1) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq \lim F_n(x_2) = \bar{F}(x_2).$$

如果F 在x 点连续, 对任何$\epsilon > 0$, 一定存在$x_1' < x < x_2'$ 使得$F(x_2') - F(x_1') < \epsilon$. 因为$D$ 稠密, 可以做到$x_1' < x_1 < x_2 < x_2'$, 因此

$$\bar{F}(x_2) - \bar{F}(x_1) \le F(x_2') - F(x_1') < \epsilon.$$

由此推出$\lim_n F_n(x)$ 存在等于$F(x)$.

6. 设$F_n \xrightarrow{\text{w}} F$. 对任何自然数$N$, 令

$$\begin{aligned} F_n^{(N)} &:= 1_{[N,\infty)} + F_n \cdot 1_{[-N,N)}, \\ F^{(N)} &:= 1_{[N,\infty)} + F \cdot 1_{[-N,N)}. \end{aligned}$$

那么$F_n^{(N)} \xrightarrow{\text{w}} F^{(N)}$. 因两边都是分布函数, 对$f \in C_\infty(\mathbf{R})$, 定理2.4.9 推出

$$\int f \mathrm{d}F_n^{(N)} \longrightarrow \int f \mathrm{d}F^{(N)}.$$

给定$\epsilon > 0$, 存在N, 使得当$|x| > N$ 时, $|f(x)| < \epsilon$. 而

$$\left| \int f \mathrm{d}F_n^{(N)} - \int f \mathrm{d}F_n \right| \le f(-N)F_n(-N) + f(N)(1 - F_n(N)) + \int_{|x| \ge N} |f| \mathrm{d}F_n \le 2\epsilon.$$

因此

$$\left| \int f \mathrm{d}F_n - \int f \mathrm{d}F \right| \le 4\epsilon + \left| \int f \mathrm{d}F_n^{(N)} - \int f \mathrm{d}F^{(N)} \right|.$$

7. 首先, 连续的分布函数必定一致连续. 对任何$\epsilon > 0$, 存在$N > 0$ 和$\delta > 0$ 使得$F(-N) < \epsilon$, $1 - F(N) < \epsilon$ 且只要$x < y$ 是$[-N, N]$ 中距离小于δ 的两点, 则$F(y) - F(x) < \epsilon$. 现在取$-N = x_0 < x_1 < \cdots < x_{u-1} < x_u = N$ 使得连续两点的距离小于δ. 然后n 充分大(只与ϵ 有关), 使得对所有i, $F_n(x_i) - F(x_i)| < \epsilon$. 现在可以证明对所有$x$, $|F_n(x) - F(x)| < 5\epsilon$. 当$x < -N$ 时($x > N$ 类似),

$$|F_n(x) - F(x)| \le F_n(x) + F_n(x) \le F_n(-N) + F(-N) \le \epsilon + 2F(-N) < 3\epsilon,$$

当$x \in [-N, N]$, 那么存在i 使得$x_i \le x < x_{i+1}$,

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &\le F_n(x) - F_n(x_i) + |F_n(x_i) - F(x_i)| + F(x) - F(x_i) \\ &\le 2\epsilon + F_n(x_{i+1}) - F_n(x_i) \\ &\le 2\epsilon + |F_n(x_{i+1}) - F(x_{i+1})| + F(x_{i+1}) - F(x_i) + |F(x_i) - F_n(x_i)| \\ &\le 5\epsilon, \end{aligned}$$

8. 由Hölder 不等式, $\mathbb{E}(|xi_n|; |\xi_n| > a) \le (\mathbb{E}|\xi_n|^p)^{1/p}[\mathbb{P}(|\xi_n| > a)]^{1/q}$. 再看$\mathbb{P}(|\xi_n| > a) \le \mathbb{E}|\xi_n|^p/a^p$.

12. (参考汪嘉岗的现代概率论基础) (1) 容易验证$\{S_n/n\}$ 一致可积, 故只需证$(S_n-\mathbb{E}S_n)/n\xrightarrow{\mathrm{p}}0$. (2) 由一致可积性

$$\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_1^n \xi_i - \xi 1_{\{|\xi_i|<n\}}\right| \le \frac{1}{n}\sum_1^n (|\xi_i|;|\xi_i|\ge n)\to 0,$$

只需证$\frac{1}{n}\sum_1^n(\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}}-\mathbb{E}\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}})$ 依概率收敛于0. (3) 由Chebyshev 不等式与独立性

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\left|\sum_1^n(\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}}-\mathbb{E}\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}})\right|>\delta\right)$$
$$\frac{1}{\delta^2 n^2}\sum \mathbb{E}(\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}}-\mathbb{E}\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}})^2.$$

只需证$\frac{1}{n^2}\sum_1^n(\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}})^2$ 极限为0. (4) 显然$\frac{1}{n^2}\sum_1^n(\xi_i 1_{\{|\xi_i|<n\}})^2\le \frac{1}{n}\sup_i\mathbb{E}(\xi_i^2;|\xi_i|<n)$, 而由Fubini 定理

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi_i^2;|\xi_i|<n) &= 2\mathbb{E}(\int_0^\infty 1_{\{|\xi_i|>y\}}ydy;|\xi_i|<n)\\ &= 2\mathbb{E}\int_0^n 1_{\{y<|\xi_i|<n\}}ydy\\ &\le 2\int_0^n y\mathbb{P}(|\xi_i|>y)dy \le 2\int_0^n \mathbb{E}(|\xi_i|;|\xi_i|>y)dy,\end{aligned}$$

再由一致可积性推出所需结论.

13. 设ξ_n 服从$b(n,x)$. 那么ξ_n/n 依概率收敛于x 且$B_n f(x)=\mathbb{E}f(\xi_n/n)$. 由$f$ 的一致连续性, $\mathbb{E}|f(\xi_n/n)-f(x)|\le 2\|f\|\mathbb{P}(|\xi_n/n-x|>\delta)+\epsilon$, $\mathbb{P}(|\xi_n-x|>\delta)\le\frac{nx(1-x)}{\delta^2n^2}\le 1/(4n\delta^2)$.

14. 先证明: 若$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 是有限测度空间, f 非负可测, 那么

$$\|f\|_{L^n(\mu)}\longrightarrow\|f\|_{L^\infty(\mu)}.$$

$\le$ 是显然的. 反之, 设$\|f\|_{L^\infty}<\infty$, 那么对任何$\delta>0$, 存在$A\in\mathscr{F}$, $\mu(A)>0$ 使得在A 上$f\ge\|f\|_{L^\infty}-\delta$. 那么

$$\|f\|_{L^n}\ge(\int_A f^n d\mu)^{\frac{1}{n}}\ge(\|f\|_{L^\infty}-\delta)(\mu(A))^{\frac{1}{n}},$$

因此结论成立. 利用这个结论

$$(\mathbb{P}(X_n\in A))^{\frac{1}{n}}=\left(\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_A e^{-\frac{ny^2}{2}}dy\right)^{\frac{1}{n}}\longrightarrow\left\|e^{-\frac{y^2}{2}}\right\|_{L^\infty(1_A dy)}.$$

推出要证结果.

§1.5 习　　题

1. (1) 设存在$t_0 \neq 0$, 使得$|\phi(t_0)| = 1$. 先设$\phi(t_0) = 1$, 那么$\mathbb{E}\cos t_0 X = 1$, 任取$h \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}\cos t_0 X \leq h\mathbb{P}(\cos t_0 X \leq h) + \mathbb{P}(\cos t_0 X > h),$$

推出$\mathbb{P}(\cos t_0 X \leq h) = 0$, 因此$\mathbb{P}(\cos t_0 X < 1) = 0$ 或者$\mathbb{P}(\cos t_0 X = 1) = 1$, 即$X$ 分布在$\{x : \cos t_0 x = 1\}$ 上, 格分布的. 一般地, 存在θ_0 使得$\mathrm{e}^{i\theta_0}\phi(t_0) = 1$, 即$\mathbb{E}\mathrm{e}^{i(\theta_0/t_0+X)t_0} = 1$, 因此$X + \theta_0/t_0$ 是格分布的, X 也是格分布的.
(2) 现在由(1), $|\phi_X(x)| = 1$ 蕴含着存在θ 使得$xX+\theta$ 分布在$2\pi\mathbf{Z}$; $|\phi_X(x')| = 1$ 蕴含着存在θ' 使得$x'X + \theta'$ 分布在$2\pi\mathbf{Z}$. 反证法, 如果X 不是常数, 那么存在$k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ 使得X 以正概率分布在$(2k_1\pi - \theta)/x$ 与$(2k_2\pi - \theta)/x$ 上. 自然地存在$k_1', k_2' \in \mathbf{Z}$ 使得

$$\frac{2k_1\pi - \theta}{x} = \frac{2k_1'\pi - \theta'}{x'}, \quad \frac{2k_2\pi - \theta}{x} = \frac{2k_2'\pi - \theta'}{x'}.$$

因此$(k_1 - k_2)/x = (k_1' - k_2')/x'$, 与不可公度的条件矛盾.
2. (1) 设ϕ 是密度f 得特征函数. 先设$f \in C_c^\infty(\mathbf{R})$, 这时分部积分,

$$\phi(x) = \int \mathrm{e}^{ixy} f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{ix}\int e^{ixy} f'(y)\mathrm{d}y,$$

因此$|\phi(x)| \leq \frac{1}{|x|}\|f'\|_{L^1} \longrightarrow 0$. 对一般$f$, 和任何$\epsilon > 0$, 存在$g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ 使得$\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$. 然后

$$|\phi(x)| \leq \|f - g\| + |\int \mathrm{e}^{ixy} g(y)\mathrm{d}y|$$

极限是零. (2) 应用Fubini 定理

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}|\phi(t)|^2\mathrm{d}t &= \int_{\mathbf{R}^2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\mathbf{R}}\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{it(x-y)}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} f(x)f(y)\sigma\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(x-y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-z^2/2} f(z/\sigma + y)f(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

先设f 还是连续且有界的, 当$\sigma \longrightarrow \infty$ 时, 右边的极限是$\sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2}$, 由Fatou 引理推出$|\phi|$ 是平方可积的. 再用控制收敛定理推出结论. 最后用逼近的方法证明结论对一般的密度函数成立.

13. 设ϕ 是ξ 的特征函数, 如果ϕ 在0 点二次可导, 则ξ 平方可积且$\mathbb{E}\xi^2 = -\phi''(0)$. 事实上, 由Fatou 引理

$$\begin{aligned}
-\phi''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{2\phi(0)-\phi(h)-\phi(-h)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\int 2(1-\cos xh)\mathrm{d}F(x) \\
&\geq 2\int \liminf \frac{1-\cos xh}{h^2}\mathrm{d}F(x) = \int x^2\mathrm{d}F(x) = \mathbb{E}\xi^2,
\end{aligned}$$

因此ξ 平方可积.

如果$\phi(x) = \mathrm{e}^{-|x|^n}$ 是特征函数, 那么$\phi''(0) = 0$, 因此得$\mathbb{E}\xi^2 = 0$, 即$\xi = 0$, 矛盾.

14. 因为$(X+Y)+(X-Y) = 2X$, 故$\phi(2x) = \phi(x)^2\cdot\phi(x)\cdot\phi(-x) = \phi(x)^2\cdot|\phi(x)|^2$. (1) ϕ 不会等于0. 如果$\phi(a) = 0$, 那么推出$\phi(a/2) = 0$, 故$\phi(a/2^n) = 0$ 推出$\phi(0) = 0$ 矛盾. (2) 令$p(x) = \phi(-x)/\phi(x)$, 那么$p(2x) = p(x)^2$. 故$p(x) = (p(x/2^n))^{2^n}$. 而$\phi(x) = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, 那么$p(x) = 1+o(x^2)$. 因此$p(x) = \lim_n (p(x/2^n))^{2^n} = 1$, 即$\phi$ 是实的. (3) 现在$\phi(x) = \phi(x/2)^4 = \phi(x/2^n)^{4^n} \longrightarrow \exp\{-\frac{1}{2}x^2\}$.

16.

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-iax}-\mathrm{e}^{-ibx}}{ix}\mathbb{E}\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}x &= \mathbb{E}\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{i(\xi-a)x}-\mathrm{e}^{i(\xi-b)x}}{ix}\mathrm{d}x \\
&= \mathbb{E}\int_{-T}^{T} \frac{\sin x(\xi-a)-\sin x(\xi-b)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

利用恒等式

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{sgn}(a)$$

得

$$\begin{aligned}
\lim_{T}\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{e}^{-iax}-\mathrm{e}^{-ibx}}{ix}\mathbb{E}\mathrm{e}^{i\xi x}\mathrm{d}x &= \pi\mathbb{E}[\mathrm{sgn}(\xi-a)-\mathrm{sgn}(\xi-b)] \\
&= \pi[\mathbb{P}(\xi=b)+2\mathbb{P}(\xi\in(a,b))+\mathbb{P}(\xi=a)].
\end{aligned}$$

§1.6 习　　题

1. 存在$[0,1]$ 上Borel 可测的g 使得$\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$, 由定义$\mathbb{E}(X;Y\leq x) = \mathbb{E}(g(Y);Y\leq x)$, 即$\int_{-x}^{x}X(w)dw = \int_{-x}^{x}g(|w|)dw = 2\int_0^x g(w)dw$. 求导$X(x)+X(-x) = 2g(x)$, 因此$\mathbb{E}(X|Y) = \frac{1}{2}(X(|w|)+X(-|w|))$.

2. 如果$a_1 = a_2 = 0$, 那么$\mathbb{E}(X|Y) = \rho\sigma_1 Y/\sigma_2$.
4. $\mathbb{E}(X; Y \in A, Z \in B) = \mathbb{E}(X; Y \in A)\mathbb{P}(Z \in B) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y); Y \in A)\mathbb{P}(Z \in B) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y); Y \in A, Z \in B)$.
6. $\mathbb{E}(\xi_1|S_n, S_{n+1}, \cdots) = \mathbb{E}(\xi_1|S_n, \xi_{n+1}, \cdots) = \mathbb{E}(\xi_1|S_n)$.
7. $\mathbb{E}(U \le X; X < a) = \int_{u\le x, x<a} p_1(u)p_2(x)dudx = \int_{x<a}\Phi(x)p_2(x)dx = \mathbb{E}(\Phi(X); X < a)$, 因此$\Phi(X) = \mathbb{P}(U \le X|X)$. $\mathbb{E}\Phi(X) = \mathbb{P}(U \le X)$
10. g 关于$\mathscr{A}$ 可测,

$$\mathbb{E}(f, A_1 \times \Omega_2) = \int_{A_1\times\Omega_2} fd\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 = \int_{A_1} gd\mathbb{P}_1.$$

12. $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(\xi|\mathscr{A})|; |\mathbb{E}(\xi|\mathscr{A})| > N) \le \mathbb{E}(|\xi|; \mathbb{E}(|\xi||\mathscr{A}) > N)$, $\mathbb{P}(\mathbb{E}(|\xi||\mathscr{A}) > N) \le \mathbb{E}|\xi|/N$.
13. 由Jensen 不等式$\mathbb{E}|X+Y| = \mathbb{E}(\mathbb{E}|X+Y||X) \ge \mathbb{E}|\mathbb{E}(X+Y|X)| = \mathbb{E}|X|$.
14. 设X 是可积随机变量, $\mathscr{G}$ 是子σ-代数, 包含所有零概率集, $Y = \mathbb{E}(X|\mathscr{G})$, 如果$X, Y$ 同分布, 证明: $X = Y$. (证明由07级同学李哲桦提供)事实上,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y; Y \ge 0) &= \mathbb{E}(X, Y \ge 0) \\
&= \mathbb{E}(X; Y \ge 0, X \ge 0) + \mathbb{E}(X; Y \ge 0, X < 0) \\
&\le \mathbb{E}(X; Y \ge 0, X \ge 0) \\
&\le \mathbb{E}(X; X \ge 0) = \mathbb{E}(Y; Y \ge 0),
\end{aligned}$$

因此其中的不等号都应该是等号, 推出$\mathbb{E}(X; Y \ge 0, X < 0) = 0$, 故而$\mathbb{P}(Y \ge 0, X < 0) = 0$. 再因为$X, Y$ 同分布, 推出$\{Y \ge 0\}$ 与$\{X \ge 0\}$ 相差一个零测集, 由完备性, $\{X \ge 0\} \in \mathscr{G}$, 同理对任何$x$, $\{X \ge x\} \in \mathscr{G}$, 因此$Y = X$ a.s.

第二章: 随机过程基础

§2.1 习　题

1. 类似§1.1 习题20.
2. 由1 推出.
6. $\mu_{(t,s)}(f) = \mathbb{E}f(X_s, X_t)$. $\Leftarrow$: 存在$\mathbf{R}^2$ 上对角线等于零的有界连续函数使得$\mathbb{P}(|X_t - X_s| > \delta) \le \mathbb{E}f(X_s, X_t) \to \mathbb{E}f(X_t, X_t) = 0$. $\Rightarrow$: 设$(s,t) \longrightarrow (u,v)$, 则$X_s \xrightarrow{\mathrm{p}} X_u$, $X_t \xrightarrow{\mathrm{p}} X_v$, 因此$(X_s, X_t) \xrightarrow{\mathrm{p}} (X_u, X_v)$.
7. 因为依概率收敛的极限与几乎处处收敛的极限是几乎处处相等的.
8. 类似习题6.

§2.2 习　　题

3. 不对. 设Ω 是正整数集合, 定义$\mathscr{F}_n = \sigma(\{1\}, \cdots, \{n\})$, 再定义$\mathscr{F}_n$ 上概率$\mathbb{P}_n(\{1, \cdots, n\}) = 0$, $\mathbb{P}_n(\{k : k > n\}) = 1$, 满足题中所述条件, 但不存在$\mathbb{P}$ 使得$\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_n} = \mathbb{P}_n$. 因为如果存在, 由可列可加性, $\mathbb{P}(\Omega) = 0$.
4. 反证法. 假若有, 不妨假设它们是有界的, 因为两个随机变量独立蕴含着它们在$L^2[0,1]$ 上正交, 而$L^2[0,1]$ 是可分Hilbert 空间, 矛盾.

§2.3 习　　题

1. 要证明$\mu(A - x)$ 关于x 可测. 如果f 有界连续, 那么$\int f(y - x)\mu(dy)$ 关于x 连续. 而连续函数生成的σ-代数就是Borel σ-代数.
4. 设(3) 为: 对$A \in \mathscr{G}_t$, $\mathbb{P}(A|\mathscr{F}_t) = \mathbb{P}(A|X_t)$. 首先由Dynkin 定理证明(M1) 等价于(3). (1) $\Rightarrow$ (2): 要证$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(B|X_t), A)$. 这由(1) 两边取期望得到. (2) $\Rightarrow$ (1): (2) 推出$\mathbb{P}(A \cap B|\mathscr{G}_t) = 1_A\mathbb{P}(B|X_t)$, 两边对$X_t$ 取条件期望.
5. C-K: $\int P_s(x, y)dyP_t(y, z) = P_{t+s}(x, z)$. 那么

$$\frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_t}\int \exp\left(-\frac{(y - m_s x)^2}{2\sigma_s^2} - \frac{(z - m_t y)^2}{2\sigma_t^2}\right)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t+s}}\exp\left(-\frac{(z - m_{t+s}x)^2}{2\sigma_{t+s}^2}\right).$$

作个积分变换: 左边等于

$$\frac{1}{m_t}\frac{1}{2\pi\sigma_s\sigma_t/m_t}\int \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_s^2} - \frac{(z/m_t - m_s x - y)^2}{2(\sigma_t/m_t)^2}\right)dy,$$

由再生性知它等于

$$\frac{1}{m_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_s^2 + (\sigma_t/m_t)^2)}}\exp\left(-\frac{(z/m_t - m_s x)^2}{2(\sigma_s^2 + (\sigma_t/m_t)^2)}\right).$$

由此推出两个方程: $m_{s+t} = m_s m_t$, $\sigma_{s+t}^2 = m_t^2(\sigma_s^2 + (\sigma_t/m_t)^2)$. 存在$a$ 使得$m_t = e^{at}$, 第二个方程推出$\sigma_0 = 0$, 存在b 使得$d\sigma_t^2/dt = bm_t^2$, 因此$\sigma_t^2 = b(e^{2at} - 1)/2a$.

§2.4 习　　题

2. $\Leftarrow$: $\tau_y\circ\theta_k + k \geq \tau_y$, 因此$\{\tau_y\circ\theta_k < \infty\} \subset \{\tau_y < \infty\}$. $\Rightarrow$: $\limsup\{X_n = y\} \subset \{\tau_y\circ\theta_k < \infty\}$.
3. 因为X 被吸收前与无限制随机游动一样. 可以直接计算一个无限制随机游动有限步到达0 和r 的概率. 对任何$x, y \in \mathbf{Z}$, 令$\phi_{x,y}$ 是T_y 在概率空间$(W, \mathscr{B}, \mathbb{P}^x)$ 上的母函数

$$\phi_{x,y}(t) := \mathbb{E}^x t^{T_y}.$$

首先由空间平移不变性

$$\phi_{x,y}(t) = \mathbb{E}^x t^{T_y} = \mathbb{E}^0 t^{T_y \circ \gamma_x} = \mathbb{E}^0 t^{T_{y-x}} = \phi_{0,y-x}(t)$$
$$\phi_{x,x}(t) = \phi_{0,0}(t) = \mathbb{E}^0 t^{T_0} = 1.$$

设$x > 0$, 因为随机游动每次移动一个单位, 故从0 出发时通过x 必须先通过1, 即$T_x \geq T_1$, 这时$T_x = T_x \circ \theta_{T_1} + T_1$, 因此由强Markov 性,

$$\begin{aligned}
\phi_{0,x}(t) &= \mathbb{E}^0 t^{T_x} = \mathbb{E}^0 t^{T_1 + T_x \circ \theta_{T_1}} \\
&= \mathbb{E}^0 t^{T_1} \cdot t^{T_x} \circ \theta_{T_1} \\
&= \mathbb{E}^0 (t^{T_1} \mathbb{E}^{s_{T_1}} t^{T_x}) \\
&= \mathbb{E}^0 t^{T_1} \cdot \mathbb{E}^1 t^{T_x} = \phi_{0,1}(t) \cdot \phi_{1,x}(t).
\end{aligned}$$

记$\phi := \phi_{0,1}$, 那么$\phi_{0,x} = \phi^x$. 另一方面, 从0 出发也必有$T_x \geq 1$, 这时$T_x = T_x \circ \theta_1 + 1$, 由Markov 性

$$\begin{aligned}
\phi_{0,x}(t) &= \mathbb{E}^0 t^{T_x} = \mathbb{E}^0 t^{1 + T_x \circ \theta_1} \\
&= t\mathbb{E}^0 (\mathbb{E}^{s_1} t^{T_x}) \\
&= t((\mathbb{E}^1 t^{T_x})p + (\mathbb{E}^{-1} t^{T_x})q) \\
&= tp\phi_{0,x-1}(t) + tq\phi_{0,x+1}(t).
\end{aligned}$$

令$x = 1$, 我们得

$$\phi(t) = tp + tq\phi(t)^2,$$

因$\phi(t) \leq 1$, 故解得

$$\phi(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2tq}.$$

由对偶性得

$$\phi_{0,-1}(t) = \mathbb{E}^0 t^{T_{-1}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2tp}.$$

由此推出, 0 点出发在有限步内到达1 的概率为

$$\mathbb{P}^0(T_1 < +\infty) = \phi(1) = \frac{1 - |p - q|}{2q} = \begin{cases} 1, & p \geq q; \\ \frac{p}{q}, & p < q. \end{cases}$$

即当随机移动偏向右时, 它必定在有限时间内到达1.

本题有更直接更本质更一般的证明. 也就是说一个有限Markov 链从一个非常返态出发总可以在有限时间内到达常返态.

4. 简单.

5. 由4 推出.

6. (1) 因为$P_n = P_{n-1}P$, 故$p_{0,0}^{(n)} = p_{0,0}^{(n-1)}p_{0,0} + (1-p_{0,0}^{(n-1)})p_{1,0}$. (2) 令$q = p_{0,0} - p_{1,0}$, 那么$p_{0,0}^{(n)} = p_{1,0}(1 + q + \cdots + q^{n-1}) + q^n$.

7. (1) 由习题1 应用反证法. (2) $\Leftarrow$: 可以验证一个状态x 可以到达的所有状态是个闭集. (3) 常返状态可达的状态肯定是常返的.

10. (1) 一个常返状态可以到达的状态是常返的, 并且可以返回. 另外零常返状态是互达等价类. 如果有限状态Markov 链有零常返状态, 那么可以假设它不可分且都是零常返的. 这时可以证明对任何两状态x, y, $p_{x,y}^{(n)}$ 收敛于零. 这与有限性矛盾. (2) 因为$\sum_y p_{x,y}^{(n)} = 1$, 故$\sum_y \sum_n p_{x,y}^{(n)} = +\infty$, 存在$y$ 使得$\sum_n p_{x,y}^{(n)} = +\infty$, 由习题5, y 常返.

11. X_n 的转移函数是$p_{0,j} = 1_{j=r}$,

$$p_{i,j} = \begin{cases} p, & j = r - i + 1; \\ 1 - p, & j = r - i; \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

解方程得平稳分布为

$$\pi = (\frac{1-p}{1-p+r}, \frac{1}{1-p+r}, \cdots, \frac{1}{1-p+r}).$$

淋湿的概率极限为$\pi_0 p$.

§2.5 习　　题

9. $(S_1, \cdots, S_n)$ 的联合密度为$\lambda^n e^{-\lambda y_n} 1_{\{0<y_1<\cdots<y_n\}}$. S_n 的密度为$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ 条件密度为$n! 1_{\{0<y_1<\cdots<y_{n-1}<t\}}/t^n$.

10. $X > t$ 当且仅当μ 在$B(t)$ 上无负荷. $\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(\mu(B(t)) = 0) = e^{-\lambda m(B(t))}$, 其中$B(t)$ 是原点为中心半径为t 的圆.

11. 只要证明$\mathbb{E}\sum_{0\le s\le 1} \Delta N_s^1 \Delta N_s^2 = 0$. 取$0 < t_0 < \cdots < t_n = 1$,

$$\mathbb{E}\sum_k (N_{t_k}^1 - N_{t_{k-1}}^1)(N_{t_k}^2 - N_{t_{k-1}}^2) = \sum_k \lambda_1\lambda_2(t_k - t_{k-1})^2.$$

取极限.

§2.6 习　　题

6. 与Kolmogorov 0-1 律类似证明.

7. $\sup_t B_t \ge \limsup_{t\to\infty} B_t$, 对任何$n$, 令$A = \{\limsup B_t > n\}$, 那么$A \in \bigcap_{t>0} \sigma(\{B_s : s > t\})$, 因此$\mathbb{P}(A) = 0$ 或者1. 但是

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\limsup 1_{\{B_t>n\}} \ge \limsup \mathbb{P}(B_t > n) = 1/2,$$

因此$\mathbb{P}(A) = 1$, 即$\mathbb{P}(\limsup B_t = +\infty) = 1$.

8. $\mathbb{P}(\limsup\{B_{t_k} > 0\}) \ge \limsup \mathbb{P}(B_{t_k} > 0) = 1/2$, 由0-1 律$\mathbb{P}(\limsup\{B_{t_k} > 0\}) = 1$.

12. $\mathbb{E}X_t X_s = e^{-t-s} \cdot e^{2t\wedge s} = e^{-|t-s|}$.

13. 由定理2.2.3 推出$\mathbb{P}^*(C) = 1$, 再由定理2.2.2 说明除空集外C 不能有其它可测子集, 因此$\mathbb{P}_*(C) = 0$.

14. Brown 运动还可以用Fourier 级数的方法产生. 设$\{\xi_n : n \ge 0\}$ 是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 上的都服从标准正态分布的独立随机变量序列. (说明其存在性.) 函数$\{1/\sqrt{\pi}, \sqrt{2/\pi}\cos x, \cdots, \sqrt{2/\pi}\cos nx, \cdots\}$ 是$L^2([0,\pi]$ 的标准正交基, 依次记为$\{e_n : n \ge 0\}$. 对任何$f \in L^2([0,\pi])$, 令

$$H(f) := a_0\xi_0 + a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \cdots,$$

其中$\{a_n\}$ 是f 的Fourier 系数: $a_n := \langle f, e_n\rangle$. 显然

$$\mathbb{E}H(f)^2 = \sum_{n\ge 0} a_n^2 = \int f^2(x)\mathrm{d}x,$$

即H 是$L^2([0,\pi])$ 到$L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 的一个等距嵌入. 对$t \in [0,\pi]$, 显然$1_{[0,t]}$ 的Fourier 级数为

$$1_{[0,t]}(x) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n\ge 1} \frac{\sin nt}{n} \cdot \cos nx.$$

证明:

$$X_t := H(1_{[0,t]}) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n\ge 0} \sum_{m=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{\sin mt}{m}\xi_m.$$

在$t \in [0,\pi]$ 以概率1 一致收敛. 因此(X_t) 是连续过程, 再证明它在$[0,\pi]$ 上是Brown 运动.

解答(参考Ito-Mckean 的Diffusion processes and their sample paths): 令

$$s_{m,n}(t)=\sum_{m}^{n-1}\frac{\sin kt}{k}\xi_k,\ t_{m,n}=\max_{0\le t\le\pi}|s_{m,n}(t)|.$$

那么

$$t_{m,n}^2\le\max\left|\sum_{m}^{n-1}\frac{e^{ikt}}{k\xi_k}\right|^2\le\sum_{m}^{n-1}\frac{\xi_k^2}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left|\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{\xi_j\xi_{j+l}}{j(j+l)}\right|,$$

然后

$$\begin{aligned}\mathbb{E}t_{m,n}^2&\le\sum_{m}^{n-1}\frac{1}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{\xi_j\xi_{j+l}}{j(j+l)}\right|^2\right)^{\frac12}\\&\le\sum_{m}^{n-1}\frac{1}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n-m-1}\left(\sum_{j=m}^{n-l-1}\frac{1}{j^2(j+l)^2}\right)^{\frac12}\\&\le\frac{n-m}{m^2}+2(n-m)(\frac{n-m}{m^4})^{\frac12},\\ \mathbb{E}t_{m,n}\le(\mathbb{E}t_{m,2m}^2)^{\frac12}&\le(\frac{1}{m}+2/\sqrt{m})^{\frac12}\le 3m^{-\frac14},\\ \mathbb{E}\sum_{n\ge1}t_{2^{n-1},2^n}&\le\sum_{n\ge1}\mathbb{E}t_{2^{n-1},2^n}<\infty.\end{aligned}$$

第三章: 随机分析基础

§3.1 习　　题

3. $\tau=\inf\{s:X_s\ne X_{s-}\}$. $A=\{\tau\ge t\}=\{\tau<t\}^c$.
5. 令$s=\tau(w)$. 则$\mathscr{F}_s\subset\{A:w,w'\in A \text{ or } w,w'\notin A\}$. 事实上, 记右边为$\mathscr{H}$. 容易验证$\mathscr{H}$ 是σ-代数, 取任何$B\subset E$, $t<s$, 因$X_t(w)=X_t(w')$, 故$\{X_t\in B\}\in\mathscr{H}$. 因此$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{H}$. 然后$\{\tau\le s\}\in\mathscr{F}_s$, 推出$w'\in\{\tau\le s\}$, 即$\tau(w')\le s$, 同理推出$w'\notin\{\tau<s\}$ 即$\tau(w')\ge s$.
6. 因为σ 是$\mathscr{F}_\tau$ 可测的, 故对任何t, $\{\sigma\le t\}\cap\{\tau\le t\}\in\mathscr{F}_t$. 而因为$\sigma\ge\tau$, 故左边等于$\{\sigma\le t\}$.
7. 定义$\mathscr{F}_{\tau+}=\{A:A\cap\{\tau\le t\}\in\mathscr{F}_{t+},\forall t\}$. (1) 证明: $\mathscr{F}_{\tau+}=\{A:A\cap\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t,\forall t\}$. $A\in\mathscr{F}_{\tau+}$, $A\cap\{\tau<t\}=\bigcup_n A\cap\{\tau\le t-1/n\}\in\mathscr{F}_t$. 反之, $A\cap\{\tau\le t\}=\bigcap_n A\cap\{\tau<t+1/n\}$. (2)设$\sigma>\tau$, $A\in\mathscr{F}_{\tau+}$, $A\cap\{\sigma\le t\}=$

$\bigcup_{r\in Q} A\cap\{\sigma\le t\}\cap\{\sigma>r>\tau\}=\bigcup_{r\in Q} A\cap\{\tau<r\}\cap\{r<\sigma\le t\}\in\mathscr{F}_t$. 因此$A\in\mathscr{F}_\sigma$. (3) 再证明$\mathscr{F}_{\tau+}=\bigcap_n \mathscr{F}_{\tau+1/n}$.

9. 利用Poisson 过程的拟左连续性: 参考定理4.3.1 的证明.

§3.2 习　　题

2.

§3.3 习　　题

9. 局部鞅的定义: 存在趋于无穷的停时列T_n 使得$M^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ 为鞅. 因此$\mathbb{E}(M_0;T_n>0)<\infty$, 且

$$M_{T_n\wedge t}-M_0=M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}+M_0 1_{\{T_n=0\}}-M_0=M_{T_n\wedge t}1_{\{T_n>0\}}-M_0 1_{\{T_n>0\}}.$$

容易推出结论.

§3.4 习　　题

13. $\mathbb{E}B^2_{T\wedge t}=\mathbb{E}(T\wedge t)\le\mathbb{E}T<\infty$. 因此$\{B_{T\wedge t}:t\ge 0\}$ 一致可积. $\mathbb{E}|B_T|\le\lim_t\mathbb{E}|B_{T\wedge t}|<\infty$, 故$B_T$ 可积. (1) $0=\mathbb{E}B_{T\wedge t}=\mathbb{E}(B_T;T<t)+\mathbb{E}(B_t;t<T)$, $|\mathbb{E}(|B_T|;t<T)\ge\mathbb{E}(|B_t|;t<T)$. 让$t$ 趋于无穷. (2) 由Doob 不等式,

$$\mathbb{E}\sup_t B^2_{T\wedge t}\le 4\sup_t\mathbb{E}B^2_{T\wedge t}=4\mathbb{E}T\wedge t\le 4\mathbb{E}T.$$

因此$\{B^2_{T\wedge t}:t\ge 0\}$ 一致可积.

§3.5 习　　题

§3.6 习　　题