金融数学讲义

应坚刚 李金凤
复旦大学数学系

2012 年 6 月 6 日

序　言

究竟什么是金融数学? 金融数学主要是讲金融还是讲数学? 可能每个人的想法都不一样. 我觉得金融数学主要内容应该是怎么用概率论和随机分析解释金融中的一些本质的东西, 当然不是解释所有, 我相信数学不是万能的, 它的用处是有限的, 比如股票的走势肯定是数学无法解释的. 幸运的是, 数学或者说随机分析能够解释基于股票价值的衍生证券的价值走势, 而且这种解释是本质的和深刻的, 所谓金融数学正是要把这种本质的东西说清楚.

金融的起源很早, 但金融数学可以说源于两次华尔街革命, 第一次革命是指 1952 年 Markowitz 的投资组合选择理论, 第二次革命是指发表于 1973 年的 Black-Scholes 期权定价公式. 我们课程的内容包括这两部分为主要内容, Markowitz 的投资组合选择理论只需要概率论以及简单的微积分就可以理解, 而 Black-Scholes 公式的理解需要比较高深的 Ito 随机分析理论, 鉴于风险控制的重要性, 金融数学课程通常也讲授关于风险对冲风险度量的一部分内容, 比如 Delta 对冲和 VaR.

目　录

第 一 讲　金融数学的内容与历史

1. 内容和参考书: 关于金融数学这个课程的内容, 我们将主要分三个部分: (1) Markowitz 资产组合选择理论; (2) Black-Scholes 期权定价公式; (3) 风险度量和管理. 在后面所列的参考书中, 最初等的是 Capinski 和 Zastawniak 的金融数学一书 (中文版), 这本书数学要求不高, 内容也不多, 比较容易入门; 其次是 Wilmott 的金融工程一书 (中文版), 数学讲得比较多和一个一些; 内容齐全而且权威的教材是 John Hull 的 Options, Futures and other derivatives 一书, 最新已经是第六版, 有中文翻译版也有英文版, 这是国外著名的金融工程专业的制定教材, 但是因为内容太多, 不可能是课堂上全部讲到; 史树中教授的两本书和 Delbaen & Schachermayer 的套利数学一书 (英文版) 几乎完全是数学, 适合数学基础好且对金融研究有兴趣的同学阅读. 建议英语程度好的同学直接阅读英文版, 由于印刷和翻译的原因, 这些书的翻译版都起来不是很流畅. 本质我们将简单介绍金融数学与金融工程的历史以及一些基本概念.

2. 数理经济学: 比金融数学更早的应用于经济的数学是 1874 年 Warlas 的一般经济均衡理论: 假定市场上共有 n 种商品, 其供给与需求是商品价格的函数, 于是这 n 种商品的供需平衡给出 n 个方程, 但是价格是需要一个计量单位的, 所以只有它们的比值是有意义的, 也就是说实际只有 $n-1$ 个变量, Warlas 提出一个法则: 总供给应该等于总需求. 这样消去一个方程, 达到一个 $n-1$ 方程和 $n-1$ 变量的的系统, 一般来说, 这个系统有解, 解就是所谓的一般均衡价格体系. 当然这是粗糙的表述, 最终由 Arrow 和 Debreu 在 1954 年应用不动点定理给出严格证明.

3. 金融: 金融是经济的一个子集, 是指金融市场的经济学. 金融市场的形成是一个长期的过程, 是自由市场经济的产物. 中国古代有过钱庄, 但从来没有形成真正的金融市场, 因为中国古代从来没有真正的市场经济. 金融市场的目的是优化货币配置, 提高投资的效率, 降低投资风险. 研究金融市场的规律当然是经济学家一直努力的方向. 经济学家渐渐地认识到金融市场的商品和通常的商品有所不同, 具有更强的不确定性, 或者说金融市场的不确定性是本质的. 因此研究金融市场需要一种新的构架, 随机方法的引入是必须的. 在所有这些问题之前, 我们首先要问金融市场究竟有没有一个规律? 我认为处于金融市场底层的资产价格本身也许有规律, 但这规律太过复杂, 到现在为止人类还无法认识它, 但是基于底层资产的衍生证券有不同于前者的随机性, 能够更好地用随机分析理论来研究, 而且发过来丰富了随机分析理论.

4. 金融数学的发展: 在 1979 年 Ross 及其合作者建立资产定价一般理论的框架时, 理论还是比较粗糙的, 数学的证明也不严格, 一直到 1990 年, Dalang, Morton 和 Willinger 合作证明了一般情形下的资产定价基本定理, 这时金融数学的一般理论才日臻完善. 许多概率学家进入这个新兴的领域, 其中有中国概率学家严加安, 他在 1980 年代证明的一个可测选择引理在第一基本定理的证明中起到了关键的作用, 他后来对金融数学中的某些结果重新给出了严格而简洁的证明. 彭实戈教授在 20 世纪末从随机控制的一个问题出发, 证明了非线性的倒向随机微分方程的解的存在性, 它实际上是鞅表示定理的推广形式, 后来发现它在金融数学中有广泛的应用, 是金融数学中最重要的结果之一, 彭实戈教授因此在 2010 年的世界数学家大会上获得做一小时报告的殊荣, 这是中国本土数学家中的第一个.

5. 课后作业: 世界上有哪些著名的金融市场? 你知道哪些金融产品? 金融危机和经济危机有什么不同有什么关系? 查资料写文章介绍著名金融市场的历史.

6. 资产: 资产是一个广泛的概念, 可以是货币, 可以是商品, 可以是有价证券等. 这里我们把它分成两类: 有风险资产, 如有价证等, 与无风险资产, 如债, 银行存款等. 风险实际上是由其价格的不可预测性来表达的, 股票的价格是无法预测的, 所以它有风险, 银行存款或者债券的收益是固定的, 所以说没有风险, 因此其中必然涉及随机变量以及概率论.

7. 风险: 风险是一个名词, 隐含着随机性. 但是怎么样度量具体的风险值至今没有一致的看法, 比如有时把随机变量的方差或者标准差 (方差的平方根) 看成是风险, 因为它是随机变量偏离其平均值程度的一个度量, 在业界的实际运作中, 也有把随机变量小于某个危险下界的概率看成为风险, 因为这从一定程度上说明一个公司的危险程度. 因此, 风险是一种随机性的度量, 但只是一种感觉.

8. 无风险资产: 无风险资产一般就是指银行存款和政府发行的债券, 当然无风险是相对的, 风险是绝对的, 银行可能倒闭, 政府可能垮台, 风险总是存在的, 但是它们有时可以忽略不计. 无风险资产一般具有固定收益, 来自利息, 现在买入价格 $A(0)$ 的债券, 如果到下个时段可以拿到的钱是 $A(1)$, 那么 $A(1)-A(0)$ 是利息, 相对比值
$$\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}$$
称为这个时段的利息率, 简称利率. 无风险债券的形式有很多种, 比如美国采用按面值支付的形式, 比如一张一年到期的 100 元债券在到期日支付 100 元, 现在买的价格是 $A(0)$, 中国的国库券采用利息

支付的形式, 比如现在买一张 100 元的国库券, 上面写明到期支付多少钱. 形式不重要, 本质都是一样的. 当然利率是变化的, 但是相对来说, 利率变化不大, 而且相对稳定. 与利率对应的概念是折现率, 例如如果无风险资产年利率为 r, 我一年后要支付一万元钱现在只需要拿出 $1000(1+r)^{-1}$ 就够了. 我们后面说的折现就是这个意义.

9. 通货膨胀率: 通货膨胀率是一个重要的经济指标, 上面所说的利率是名义利率, 实际的利率与通货膨胀率有关, 如果通货膨胀率高于名义利率, 那么实际利率是负数, 货币总是在贬值的, 反之, 实际利率是正数. 但是在金融数学中, 我们不关心通货膨胀率, 因为可以认为通货膨胀率已经被考虑在利率中, 也就是说我们可以认为利率是实际利率.

10. 离散时间模型: 我们考虑一个投资和收益的过程, 必定与时间相关, 所以采用离散时间和采用连续时间都是可以接受的, 两者世界上没有本质的区别, 在说明问题时, 离散时间更容易理解, 更直观; 在具体计算时, 可能采用连续时间的随机过程模型 (比如布朗运动) 比较容易应用微积分来进行, 方法也多些. 从理论上可以证明, 连续时间模型是适当的离散时间模型的极限情况.

11. 投资组合选择理论: 第一个应用概率论方法系统研究证券投资的是 Markowitz, 它把证券当做随机变量, 一个投资者选择各种证券的投资比例, 称为投资组合, 然后他定义了收益和风险, 并假设如果可以选择的话, 理性的投资者一定选择收益更高且风险更低的投资组合, 他发现这样的选择不是唯一的, 通常是双曲线的一支, 称为有效边界. 他的贡献是给出了怎么选择投资组合的一个路线图.

12. 无套利假设: 套利是指没有风险的赚钱机会. 由于市场的有效性和信息的公开性, 任何套利机会都会迅速消失, 因此市场无套利是一个说得过去的假设, 也许是一个似非而是的假设, 因为实际上大多数人在交易的时候都相信自己看到了套利机会, 正因如此, 金融市场的交易才会这么活跃, 也正是由于交易的活跃才使得套利机会转瞬即逝. 第一个提出无套利假设是是经济学家 Miller, 他在 1958 年研究公司价值与其财务政策的关系时提出: 如果两个公司未来的价值是一样的, 那么它们现在的价值也是一样的, 否则很容易构造一个套利机会. 或者说, **两种未来价值一样的资产其现在的价值也一样**. 后来人们发现, 很多金融衍生品的价格都可以通过无套利假设来确定, 因此无套利假设成了现代金融经济学的基本假设之一.

13. Black-Scholes: 不可否认, 金融数学真正兴起是由于 Black 与 Scholes 在 1973 年发表的期权定价公式, 在股票价格遵循几何布朗运动的假设之下, 他们的文章奇迹般地给出了期权定价的一个显式表达式, 其中应用了 Itô 公式, 隐含地应用了等价鞅程度以及鞅表示定理这些极其抽象的定理, 而且这个公式在市场检验中契合度很好, 同时 Chicago 期权交易所也正好在 1973 年成立, 使得衍生证券有理论指导又有实验场所, 从此金融数学和衍生证券市场一起迅速发展起来, 成为二十世纪后期数学理论最引入注目的应用.

14. 衍生证券: 什么是衍生证券? 衍生证券的价值是由它所依附的基本资产决定的, 市场上比较常见的有远期, 期货和期权. **远期是指在固定时间以商定价格交易某种商品 (包括物品, 股票, 货币等等) 的一份合同.** 它在签订的时候没有支付, 其中的商品就是远期所依附的资产, 其价格在未来是不确定的. 显然这份合同的价值随着时间推移因为商品的价格改变而改变, 如果在商定的时间商品的市场价高

于商定价, 那么合同的价值是正的, 反之其价值是负的. **期货是交易所交易的由保证金制度规避了违约风险的远期合同.** 期权是针对股票而言的, 是指在商定时间以商定价格购买某种股票的权利, 不是强迫的, 可以放弃. 远期和期货都是义务, 到期必须执行. 因为是权利而非义务, 期权在交易时是需要支付的, 因此有期权定价的问题.

15. 衍生证券的意义: 衍生证券不是数学家凭空想象出来的, 它是因市场需求而实际存在的. 它原始的需求应该是规避风险的考虑, 例如某个公司因为在一年后确定要使用一笔美元外汇, 它就可以在市场上买一份一年的美元远期, 这样做不能保证它赚钱, 因为一年后美元汇率究竟怎么样无人知道, 但能规避因为美元的可能大涨而给公司带来的意外风险, 使前景更加确定. 所以衍生证券的存在可以降低随机性, 也就是降低因为市场波动引起的风险. 但如何事情都是两面的, 衍生证券可以降低风险, 也就可以放大风险. 例如, 假设现货石油 100 美元一桶, 一百万美元可以买一万桶, 某人相信三个月后石油涨价到 130 一桶, 现在市场上可以买到三个月到期 110 元一桶的石油期货, 他有两个选择 (1) 现货买入一万桶, (2) 放手一睹, 以一百万做保证金买入 10 万桶石油期货. 三个月后, 如果石油如期涨到 130 美元, 那么第一种选择带来 30 万利润, 第二种选择带来 300 万利润, 但是如果三个月后石油跌到 80 美元一桶, 那么第一种选择使他亏损 20 万美元, 而第二种选择会使他血本无归, 风险的放大不言而喻.

16. 课后作业: 查资料写一篇关于衍生证券的历史的报告.

17. 投机: 投机的机是指机会, 投机是指那些在市场上寻找套利机会的行为, 投机存在的原因是因为市场的随机性, 或者说没有随机性就没有投机. 投机是逐利的产物, 金融市场上有大量的投机者存在, 投

机者无孔不入的存在使得市场变得更有效, 套利机会消失得更快更彻底. 衍生证券当然无例外地会被投机者所利用. 实际上, 投资和投机没有根本的区别, 很多投资是为了投机, 很多投机也导致投资.

18. 基本定理: 以几何 Brown 运动为资产价格模型的 Black-Scholes 公式面试后几年, 人们发现其中有些东西与具体的模型无关, 这导致 1976 年 Ross 的套利定价理论的出现, 这个思想在 1979-1981 年由 Harrison, Kreps, Pliska 进一步完善, 其结果后来被称为资产定价两个基本定理, 第一定理是这样表述的, 市场无套利假设等价于存在与原测度等价的概率测度使得在这个测度下基本资产的期望收益率等于无风险债券的收益率, 用鞅的语言说, 折现后的基本资产价格在新测度下是鞅. 第二定理是说衍生证券的收益可由投资风险资产得到等价于鞅测度唯一. 在这两个定理下, 任何衍生证券的价格都等于它在到期日价值的期望折现. 要说清楚这两个定理, 我们就要从鞅论开始, 理解鞅就能理解资本定价基本定理. 基于此, Ross 和 Cox, Rubinstein 一起在 1979 年提出了简单的二项期权模型, 直观本质地解释了两个基本定理, 并且应用中心极限定理, 当时间间隔趋于零时, 推出连续时间的 Black-Scholes 公式. 从基本定理出发, 金融经济中的衍生证券定价就变得非常直观而且简单, 不需要借助于繁琐的一般经济均衡理论.

19. 可复制的定价: 衍生证券是多种多样的, 远期和期货是客户之间交易的, 但期权不一样, 它是由某个专门的金融机构出售的, 期权可以通过无套利原理轻松定价并非就可以万事大吉了. 因为对于想卖期权的机构来说, 如果卖出一份期权就要承担一份风险对于它们来说是不可接受的. 它们的期望是得到一份无风险的手续费, 也就是说要的是无风险定价. 显然, 期权执行时持有人的收益就是机构需要

最终支付的, 那么一个想法是, 这份收益可以通过持有人支付的期权费作为初始投资通过在所依资产上的某种方式的投资得到. 如果可以, 这个定价就称为无风险定价, 这份期权称为可复制的. 这也就是资产定价第二基本定理, 它是说无风险定价存在的充分必要条件是鞅表示定理成立. 它涉及更深刻的随机分析理论.

20. 金融市场: 现在的金融业已经是一个庞然大物, 从几次金融危机的结果看, 几乎可以左右经济甚至一个主权国家的命运, 它给百姓和国家带来的损失不亚于真正的战争. 不管金融业和金融研究如何发展, 我们应该记得金融业本来的目的是服务业, 给消费者带来方便给企业更多的融资渠道, 金融研究的目的是金融市场的健康和稳定. 但是现在的人们 (包括产业人员和研究人员) 似乎已经忘记了这些, 都贪婪地想从金融市场中寻找套利机会, 获取额外的财富, 比如现在很多业者想从普通人很难企及的高频交易中寻找套利机会, 我觉得这些行为没有什么道德可言, 当然也没有什么可谴责的, 但是古语说: 螳螂捕蝉, 黄雀在后. 你在寻找摄取别人财富的机会时, 也许你正成为其他人的盘中餐. 记住, 在风险面前人人平等.

第 二 讲　期货与期权

1. 金融市场上的资产: 无风险资产和风险资产. 无风险资产是指银行存款或是由政府, 金融机构和公司发行的债券. 风险资产的典型代表是股票, 当然还可以是外币黄金以及原油等商品. 在本讲义里, 我们不区别资产的价格和价值, 或者说价值是由价格来衡量的.

2. 股票与商品: 典型的风险资产是股票, 股票是一种交易所交易的金融产品. 证券交易所通常有很多股票, 具体的一种股票称为个股, 个股的价格随时间变化称为是个股的走势. 描述股票市场整体的走势称为股指, 它是由选出的有代表性的股票价格加权产生的, 如美国的标准普尔, 英国的 FTSE100, 日本的日经指数, 中国的上证指数等. 商品一般是指象贵金属石油食品等实物性产品, 它们的价格由于供需变化而呈现随机性, 我们这里关注的是在期货市场上交易的商品, 而不是现货市场上出售的商品.

3. 预测市场: 预测市场是极其困难的, 甚至我们不知道是不是可能, 因为市场看起来完全是随机的. 除了一些巫术般的预测, 大多数人都期望以过去的信息来预测将来, 这在最著名的两个股票模型: 二项模型和 Black-Scholes 模型中理论上是不可能的, 因为这两个模型有 Markov 性, 它是说在预测将来时, 所有过去的信息都已经体现在现在的股价中了. 即便如此, 由于巨大的利益, 全世界还是有无数的天才们在致力于预测市场. 书店里有无数的书教你如何预测市场, 尽管很多看起来完全是胡扯, 比如占星术什么的.

   (a) 基本面分析: 基于对影响股票或其它金融产品的众多因素的考察来预测, 其中包括一般的经济政策分析, 还有影响股票的具

体因素, 以及象全球变暖等因素.

(b) 技术分析: 基于对股票的历史价格的观察分析来预测未来价格走势, 具体有 (1) 曲线图, 这在报纸和电视上经常看到; (2) 支撑位与阻力位; (3) 趋势线; (4) 移动平均线; (5) 相对强度, 表示过去 N 天上涨天数占的比例; (6) 震荡指标, 定义为

$$100 \times \frac{\text{当前股价} - n\text{天的最低价}}{n\text{天的最高价} - n\text{天的最低价}};$$

(7) 布林带; (8) 日本烛线图, 它可以在一个图上包含更多的信息.

4. 课后作业: 调查并详细介绍一种市场预测方法, 最好有相应的实证分析.

5. 金融衍生工具: 衍生证券是一种其价值依赖于其它风险资产价值的证券. 衍生证券是金融业的创新产品, 它的推出最初是为了对冲持有风险资产时的风险的. 衍生证券的发展是惊人的, 现在它已经是金融市场的重要组成部分了, 它是金融数学的主要研究对象. 下面我们介绍几种实际的衍生证券.

6. 远期合约: 远期合约是指未来指定时间以现在商定的价格购买或者卖出风险资产的协议, 指定的时间称为交割日 (或者到期日), 商定的价格称为远期价格, 通常记为 F. 打算购买资产的称为远期合约多头, 打算卖出资产的称为远期合约空头. 在远期合约签订交易时, 没有现金支付. 如果风险资产在到期日的价格是 S_n, 那么持有远期多头的投资者获利是 $S_n - F$, 持有空头者的获利是 $F - S_n$, 都是随机变量, 远期合约也是风险资产的一种.

7. 远期价格: 远期合约没有现金支付, 所以远期价格是至关重要的, 那么它是不是可以被确定的呢? 假设远期合约中的风险资产现在时刻 0 的价格是 S, 到期日时刻 1, 期间的无风险资产利率为 r, 如果风险资产没有持有成本, 那么它的远期价格 F 应该是

$$F = (1+r)S.$$

论证如下:

(a) 如果 F 高于 $(1+r)S$, 那么我可以签订一份远期空头, 然后在贷款 S 元钱买入风险资产一份持有到下个时刻以价格 F 卖给持有多头的投资者, 然后还给银行钱及利息 $(1+r)S$, 如此赚得金额 $F-(1+r)S$. 反之, 如果 F 低于 $(1+r)S$, 那么可以签订一份远期多头, 然后现在卖空一份风险资产得 S 元钱, 存入银行, 到下个时刻, 从银行拿到资金 $(1+r)S$, 以远期价格 F 买入风险资产还给所有者, 如此赚得金额 $(1+r)S-F$

上面两种情况下构造的赚钱机会是完全没有风险的赚钱机会, 称为套利机会. 通常认为, 套利在一个有大量成熟的投资者的市场是不可能的, 或者说套利机会因为投资者的逐利行为而迅速消失, 由于套利不可能存在, 远期价格应该是 $(1+r)S$. 这种定价的方法通称为套利定价方法. 它的一般思想是卖出价格被高估的资产, 买入价格被过估的资产而从中获利.

8. 期货合约: 期货合约和远期合约相似. 不同的是期货是在交易所交易, 要遵循一定的规则以避免违约风险, 期货合约规定每天进行结算, 称为盯市 (marking to market). 期货合约在交易时是没有价值的, 但随着时间改变, 商品的供求关系导致商品价格改变, 因而导致期货合约产生价值, 这时会导致支付. 比如现价 100 元年利率 5%

的一年期的石油期货价为 105 元, 但是在第二天油价涨至 120 元, 那么一年前期货价应该是 126 元, 那么卖方应该支付给买方 21 元. 为了避免某一方因为无法支付或者不愿支付造成违约, 交易所要求双方存入一定数量的资金作为保证金, 如果某一方不能按要求交纳保证金, 期货合约就会被平仓, 就是合约取消, 保证金账户中的钱全部归另一方. 所以远期合约只需关注交割日的价格, 中间价格的起伏不必在意, 而期货合约不仅需要关注交割日的价格, 也需要关注这个期间的价格, 因为即使合约最终是赚钱的, 你也可能因为挺不过中间价格的波动而被平仓, 但是远期有违约风险, 而期货基本没有.

9. 课后作业: 查资料写一篇关于国内或者国外期货交易所的报告.

10. 交叉套期保值: 远期合约通常用于套期保值. 比如说投资者 3 个月内要卖出 100 万桶石油, 那他就签一份三个月到期的期货空头合约. 但有时市场上没有一样的期货商品, 比如你要航空煤油, 但市场上没有, 那就可以选择相近的期货商品来进行套期, 比如取暖用的煤油, 称为交叉对冲 (cross hedge), 问题是应该签多少份合约呢? 这就是套期比率的问题, 所谓套期比率是指持有期货合约数量与风险暴露资产数量之间的比例. 一般的想法可能是以 1:1 的比例来保值, 实际上, 这个比例可能不是最恰当的, 因为, 虽然现货价格和期货价格最终会趋于一致, 但期货价格的变化与现货价格的变化步调不是完全一致的. 这个比例多少合适呢? 用 ΔS 与 ΔF 分别是套期保值期限内现货价格的变化与期货价格的变化, σ_S 与 σ_F 分别是它们对应的标准差, ρ 是它们的相关系数, 一般这个值接近 1. 再设 h 是套期保值率. 当套期保值者持有资产的多头和期货空头时, 在套

期保值期限内资产的价值变化为

$$\Delta S - h \cdot \Delta F,$$

相反, 对空头的资产和多头的期货时, 价值变化为

$$h \cdot \Delta F - \Delta S.$$

无论哪种情况, 价值变化的方差为

$$v = \sigma_S^2 + \sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F,$$

当

$$h = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

时, v 达到最小值, 这个值称为最佳套期比率. 当两者变化的步调完全一致时, 这个比率是 1.

11. 例: 某公司知道它将在 3 个月后购买 100 万加仑的航空燃料油. 在 3 个月内每加仑航空燃料油的价格变化的标准差为 0.032, 用于套期保值的取暖用燃料油期货价格变化的标准差为 0.040，它们的相关系数是 0.8. 因此最佳套期比率为

$$0.8 \times \frac{0.032}{0.040} = 0.64.$$

一张期货合约是 42,000 加仑, 因此公司应该购买

$$0.64 \times \frac{1,000,000}{42,000} = 15.2$$

即约 15 张合约来进行套期保值.

12. 课后作业: 调查期货市场的大豆和玉米, 它们的期望收益和波动率, 它们的价格变化标准差以及相关系数?

13. 期权: 另外一种衍生证券是期权, 期权多种多样, 最简单的欧式期权是未来指定时间以现在商定的价格购买或卖出风险资产的权利, 购买的称为看涨期权, 卖出的称为看跌期权. 它与远期的区别是远期是必须执行的, 而期权可以不执行. 比如投资人购买一份到期时间 n 指定价格为 K 的欧式看涨期权, 显然如果时刻 n 时风险资产的价格高于 K, 投资人有利可图, 执行期权, 获利为 $(S_n - K)$, 反之如果风险资产价格低于 K, 那么投资人无利可图, 当然选择不执行期权, 这样投资人获利为 0. 用数学符号表达, 购买欧式看涨期权的投资人获利为

$$(S_n - K)^+ = \max(S_n - K, 0).$$

同样购买欧式看跌期权的投资人获利为

$$(K - S_n)^+ = \max(K - S_n, 0).$$

它们都依赖于时刻 n 时的资产价格 S_n, 在时刻 n 前是随机的.

14. 看涨与看跌: 出售一个看涨期权与出售一个看跌期权, 看起来两者是类似的, 但原则上有本质的不同, 因为两者所得都是有限的, 但潜在的损失很不一样, 一份看涨期权潜在的价值实际上是无限的, 因为理论上股票价格没有上界, 而一份看跌期权的价值总是有限的, 因为股票价格有下界. 如果你买了一份执行价格 K 到期日 n 的欧式看涨期权与卖出一份同样参数的欧式看跌期权, 那么这个投资组合在到期日的价值为

$$(S_n - K)^+ - (S_n - K)^- = S_n - K.$$

它可以通过在初始时刻持有一股股票和贷款 $\mathrm{e}^{-rn}K$ 来达成, 这说明在 t 时刻看涨期权价格 C 与看跌期权价格 P 应该满足

$$C - P = S_t - \mathrm{e}^{-r(n-t)}K.$$

此公式称为看涨看跌期权平价 (put-call parity).

15. 注意远期或者期货的最终价值是商品价格的线性函数, 但期权不是. 这在数学方法上导致很大的不同, 线性问题总是要比非线性问题简单.

16. 美式期权: 美式看涨期权与欧式类似, 不同之处在于美式期权可以在到期时间前的任何时间执行. 怎么表达美式期权的价值呢? 显然美式看涨期权的价值应该超过欧式看涨期权, 因为投资人总是可以选择在到期时间执行期权. 问题是投资人能不能得到更大的利益, 比如能不能选择在资产价格达到到期时间前的最高点时执行期权呢? 但实际上显然投资人做不到这点, 因为他所有的信息是以前的, 它不知道未来, 他不可能知道什么时候是最高点. 我们后面将证明美式看涨期权实际上不比欧式更好, 它们的价钱应该是一样的.

17. 衍生证券的价值: 衍生证券在到期时的价值一般是由资产的价格决定, 比如远期和期权的价值是由资产到期时价格 S_n 决定, 或者说是 S_n 的函数, 美式期权的价值是由所有时间的资产价格 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 决定, 或者说是 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的函数. 这时我们说到期时 n 的衍生证券的价值 V_n 是关于 $S_1, \cdots, S_n$ 可测的, 或者说一个到期日为 n 的衍生证券是一份合约, 它的价值是 $(S_1, \cdots, S_n)$ 的函数.

18. 衍生证券的定价: 衍生证券在签售时 (时刻 0) 的价格就是衍生证券的定价. 远期或者期货在到期日可能赚可能赔, 但必须执行, 故而在签订时不支付, 确定远期价格是远期的关键所在. 而期权是权利不是义务, 所以一定要付出, 所以期权的指定价格不是很重要, 重要的是它在时刻 0 值什么价.

19. 随机产品: 价值不可预测的产品可以称为随机产品. 随机产品是多

种多样的, 风险资产是随机产品, 衍生产品当然也是随机产品. 最简单直观的随机产品是 Las Vegas 的赌场里德老虎机, 比如一拉杆, 里面三个转盘开始转动一会儿后停止得到三个数字, 机器根据预先的规则吐出一定额度的钱, 也可能什么也没有. 这个随机产品怎么定价? 也就是说, 顾客应该花多少钱玩一次? 通常的方法是应用大数定律, 价格等于随机产品的期望回报. 大数定律的定价的合理性强烈依赖于大样本, 因为大数定律定价是存在风险的, 从大数定律看出, 风险与样本量成反比, 但是风险永远无法消除, 这也就是保险公司一定要扩展业务的理由, 保险公司也不愿意保那种样本量小的险种, 比如火箭发射, 比如飓风造成的损失等. 大数定律定价的优点是简单, 但缺点是风险.

20. 衍生证券的定价思想与大数定律的定价思想是完全不同的, 首先衍生证券的价值是依附于其他更基本的随机产品的, 所以可能存在不同于大数定律定价的方法. 大数定律的定价方式使得它适用于赌场或者类似赌场的保险公司, 而不适用于不能承担风险的银行和证券公司等服务业. 服务业的基本法则是为投资人提供一个交易或者销售平台, 而它自己不承担风险, 只收取服务费.

21. 无风险定价: 比如一个销售期权的公司, 它卖出一份期权, 等于卖出一份责任, 在到期时间它必须给期权购买者相应的回报, 如果他什么也不做, 那期权就是一个风险. 所以它的想法是收取合理的费用, 通过适当的投资方式最终获得相应的回报, 无论资产涨跌, 这份回报恰好等于期权的回报, 这就是所谓期权的复制, 也就是说收取费用通过投资风险资产的手段获得等同于期权的收益. 这个费用就是期权的定价.

22. 时间: 离散时间 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 一个单位时间的长度可以是秒, 分,

天, 月, 年以及其它任何时间单位. 我们说 $n-1$ 到 n 是第 n 个时段. 设 0 时刻价值为 A_0 的无风险资产在时刻 n 的价值为 A_n, $\{A_n\}$ 是一个确定非随机的递增数列.

$$r_n := \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n-1}}$$

是第 n 个时段的利率, 对应地,

$$\frac{1}{1+r_n} = \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

是第 n 个时段的折现因子, 第 n 时刻的一块钱相当于前一时刻的 $\frac{1}{1+r_n}$ 块钱. 设 S_n 是时刻 n 时风险资产的价格, S_n 是一个随机变量, 如果要代表多种风险资产, S_n 可以是一个随机向量. $\{S_n : n \geq 1\}$ 是一个随机序列. 我们假设资产的价格总是正的, 即 $S_n > 0$. 同样地

$$K_n := \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}$$

是风险资产在第 n 个时段的收益率, 也是个随机变量.

23. 投资组合: 设市场上有多种风险资产, 把资金以某种比重投资在多种风险资产上给我们无穷的投资方式, 这样做至少可以降低风险. 那么我们是不是做得更好一些? 是不是可以用某种简单的方法来适当地排除某些不合理的投资组合呢? 以什么样的标准来选择呢? 本章我们将介绍 Markowitz 的投资组合选择理论. 在 n 时刻持有 x 份风险资产和 y 份无风险资产的投资者的 n 时刻的财富为

$$V_n = xS_n + yA_n. \tag{2.1}$$

数对 (x, y) 称为是投资组合或 portfolio, 同样如果有多种风险资产, 这里的 x 可以是向量. 在实际的股票市场或货币市场, x, y 一般必

须是整数, 但为了数学上的方便, 我们这里的 x, y 可以是任何实数. 当 x 是正的时候, 我们说投资者买入, 或拥有多头头寸, 否则说投资者卖空, 或说拥有空头头寸. 相应地, 当 y 是正的时候, 说投资者存款 (货币的多头), 否则说投资者贷款 (货币的空头). 有的市场是不容许空头的.

24. 财富的增加: 时刻 $n-1$ 的投资组合 (x, y)

$$V_{n-1} = xS_{n-1} + yA_{n-1} \tag{2.2}$$

在时刻 n 的财富为

$$V_n = xS_n + yA_n. \tag{2.3}$$

这推出第 n 时段投资组合 (x, y) 的财富变化为

$$V_n - V_{n-1} = x(S_n - S_{n-1}) + y(A_n - A_{n-1}). \tag{2.4}$$

25. 投资组合的收益率: 类似地, 投资组合 (x, y) 的收益率是

$$K_V = \frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n-1}}.$$

26. 期望收益和风险: 随机变量的数学期望和方差是两个最重要的数字特征. 风险资产的收益的数学期望称为期望收益, 其标准差 (方差的平方根) 经常称为风险, 因为它是描述收益的随机性大小程度的一个指标. 比如风险资产收益率的期望和标准差为

$$\mu_n = \mathbb{E}[K_n],$$
$$\sigma_n = \sqrt{\mathbb{E}(K_n - \mathbb{E}[K_n])^2}.$$

27. 理性选择: 在讨论两个不同投资组合的好坏时, 收益是主要因素, 但是收益是随机变量, 几乎无法比较, 而期望收益和风险是两个数字, 它们的比较相对容易. 基本的假设是, 如果两个投资组合的收益相同, 那么风险小的更好; 如果风险相同, 那么收益大的更好.

28. 例: 设无风险资产 $A(0)=100$, $A(1)=110$, 股票价格 $S(0)=80$ 且

$$\mathbb{P}(S(1)=100)=0.8,\ \mathbb{P}(S(1)=60)=0.2.$$

假设现在有 10,000 美元, 买 50 股股票和 60 份债券, 那么到时刻 1, 资产组合的价值为

$$V_1 = 50S_1 + 60A_1 = \begin{cases} 11600, & \text{如果股票涨;} \\ 9600, & \text{如果股票跌.} \end{cases}$$

那么投资组合的收益为

$$K_V = \frac{50(S_1 - S_0) + 60(A_1 - A_0)}{V_0} = \begin{cases} 0.16, & \text{如果股票涨;} \\ -0.04, & \text{如果股票跌.} \end{cases}$$

投资组合的期望收益为

$$\mathbb{E}[K_V] = 0.16 \times 0.8 + (-0.04) \times 0.2 = 0.12$$

即 12%, 投资组合的风险为

$$\sqrt{\mathsf{var}(K_V)} = 0.08,$$

注意风险的值通常没有绝对的意义, 只有相对的意义.

29. 两种资产: 设有两种资产, 其 n 时刻的价格分别为 $S_1(n)$ 与 $S_2(n)$. 在时刻 0 分别投资 x_1, x_2, 这样, 初始时刻的投资价值为

$$V(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0).$$

x_1, x_2 只反映投资资产的数量, 没有真实反映投资资产的价值, 因此我们定义权重

$$w_1 = \frac{x_1 S_1(0)}{V(0)},\ w_2 = \frac{x_2 S_2(0)}{V(0)},$$

它们分别是投资在两种资产上的投资权重, 看起来更为直观. 如果资产不能卖空, 那么权重都是正的且都在 0,1 之间, 是真正意义上的权重, 如果资产可以卖空, 那么权重可正可负, 但是满足

$$w_1 + w_2 = 1.$$

实际上只有一个自由度. 为什么要引入权重? 前面投资组合中的, x, y 和资产的单位价格有关, 而资产的单位价格可能很不一样, 比如苹果的股票是每股 1000 美元, 而百度的股票可能只是每股 50 美元, 所以在看股票数量时候意义不大, 也不方便, 而相比之下, 引入权重更为方便, 它描述总投资是以什么比例分配到具体的风险资产上的.

30. 投资收益: 设在两种资产上的投资收益分别为 K_1 与 K_2, 那么投资组合的收益

$$K_V = w_1 K_1 + w_2 K_2,$$

因为

$$\begin{aligned} K_V &= \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} \\ &= \frac{x_1(S_1(1) - S_1(0)) + x_2(S_2(1) - S_2(0))}{V(0)} \\ &= w_1 \frac{S_1(1) - S_1(0)}{S_1(0)} + w_2 \frac{S_2(1) - S_2(0)}{S_2(0)} \\ &= w_1 K_1 + w_2 K_2. \end{aligned}$$

现在我们设权重 w_1, w_2 是模型的参数, 它们的选择就是投资组合的选择.

第 三 讲　资产组合选择理论

1. 期望收益率: 投资组合的期望收益率是两种资产上的期望投资收益率的加权平均

$$\mathbb{E}[K_V] = w_1\mathbb{E}[K_1] + w_2\mathbb{E}[K_2].$$

将上面三个期望收益率以此表示为 μ_V, μ_1 与 μ_2,

$$\mu_V = w_1\mu_1 + w_2\mu_2.$$

收益率的方差要复杂一些,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[K_V - \mathbb{E}[K_V]]^2 &= \mathbb{E}[w_1(K_1 - \mathbb{E}[K_1]) + w_2(K_2 - \mathbb{E}[K_2])]^2 \\ &= w_1^2\mathsf{var}(K_1) + w_2^2\mathsf{var}(K_2) + 2w_1w_2\mathrm{cov}(K_1, K_2).\end{aligned}$$

如果用 σ_V^2, σ_1^2 与 σ_2^2 分别表示 K_1, K_2, K_V 的方差, 然后引入相关系数

$$\rho_{1,2} = \frac{\mathrm{cov}(K_1, K_2)}{\sigma_1\sigma_2},$$

那么

$$\sigma_V^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2.$$

因为 $|\rho_{1,2}| \le 1$, 所以若 w_1, w_2 非负, 那么

$$\sigma_V \le w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2,$$

投资组合的标准差处于两种风险资产的标准差之间.

2. 期望收益与风险: 把资产的方差或者标准差 σ_V 理解为风险的一种度量, 那么通过改变权重, 期望和风险有以下关系

$$\mu_V = w_1\mu_1 + w_2\mu_2;$$

$$\sigma_V = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2};$$
$$w_1 + w_2 = 1.$$

这样, 可以消去 w_1, w_2, 因此 μ_V 与 σ_V 有双曲线关系

$$\begin{aligned}\sigma_V^2 = (\mu_1-\mu_2)^{-2}[&(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2})\mu_V^2\\ &-2\mu_V(\mu_2\sigma_1^2+\mu_1\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2(\mu_1+\mu_2)\rho_{1,2})\\ &+(\mu_2^2\sigma_1^2+\mu_1^2\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\mu_1\mu_2\rho_{1,2})]\end{aligned}$$

因为 $\sigma_V > 0$, 所以它只是双曲线的一支, 且其顶点为

$$\left(\frac{\mu_2\sigma_1^2+\mu_1\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2(\mu_1+\mu_2)\rho_{1,2}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}}, \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{1,2}^2}}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{1,2}}}\right).$$

3. 风险期望平面: 把一个投资组合的期望收益作为纵坐标, 标准差作为横坐标标在一个平面坐标系上, 这个坐标平面称为风险期望平面, 或者 σ-μ 平面. 直观地, 如果我们把两种资产的风险收益 (σ_1, μ_1) 与 (σ_2, μ_2) 作为两个点标在风险期望平面上, 那么**所有投资组合的风险收益情况是一条通过这两个点的双曲线**; **如果不能卖空**, **那么所有情况是双曲线位于两点之间的那一段**. 另外, 当 $\mu_1 = \mu_2$ 时, 双曲线退化为一条平行于水平轴的直线; 当 $|\rho_{1,2}| = 1$, 它退化为两条互为反射的交叉直线. 如果 K_1 是无风险的, 那么 $\sigma_1 = 0$ 而 μ_1 是无风险资产利率 r, 这时也是两条直线

$$\sigma_V = \left|\frac{\mu_V - r}{\mu_2 - r}\right|\sigma_1.$$

4. n 个风险资产: 设有 n 种不同的风险资产, 收益率分别为 $K_1, \cdots, K_n$, 投资组合

$$K_V = w_1K_1 + w_2K_2 + \cdots + w_nK_n,$$

其中 $\{w_i\}$ 是投资比例, $w_1 + \cdots + w_n = 1$, 同样地, 如果不容许卖空, $w_1, \cdots, w_n$ 都是非负的. 令 μ_i 是第 i 种资产的期望收益率, C 是随机向量 $(K_1, \cdots, K_n)$ 的协方差矩阵

$$C = (\mathrm{cov}(K_i, K_j))_{1 \leq i,j \leq n},$$

其中

$$\mathrm{cov}(K_i, K_j) = \mathbb{E}[(K_i - \mu_i)(K_j - \mu_j)].$$

一般来说, 矩阵 C 是正定的, 除非资产的收益是线性相关的.

5. 投资组合选择: 如果投资总额固定, 可以投资的风险资产固定, 那么我们总希望寻找相对好的投资组合. 这就是 Markowitz 的投资组合选择理论, 它依赖于对于风险收益的简单分析. 首先我们假设, 对于两个不同的投资组合, 如果期望收益相同, 那么投资人总是选择风险较小的那个投资组合; 反之, 如果风险相同, 那么投资人总是选择期望收益较高的投资组合. 用数学语言来说, 风险收益平面上的投资组合点 (σ, μ) 有一定的偏序关系: 用 (σ_1, μ_1) 与 (σ_2, μ_2) 表示两个投资组合的风险收益, 那么

$$(\sigma_1, \mu_1) < (\sigma_2, \mu_2)$$

当且仅当 $\sigma_1 > \sigma_2$ 且 $\mu_1 < \mu_2$, 即投资组合 2 的收益更好, 风险更小. 也就是说, 在方差期望平面上, 与一个投资组合比较, 位于它左上角的投资组合更好, 是理性的投资人当然的选择. **一个投资组合称为是有效的, 如果在可许的投资组合中没有比它更好的投资组合**. 在可许的投资组合中, 所有有效的投资组合全体称为**有效边界**或者**组合前沿**.

6. 关于风险: 在金融领域, 风险是一个常听到用到的词, 但是风险究竟是什么风险到底有多大, 谁也无法说清楚, 风险是看得见摸不着的

东西, 很难精确描述和衡量, 在这个讲义中, 我们多次提到风险, 但也没有标准的定义.

7. 有效边界: 给定 n 中风险资产, 它的投资组合的有效边界一般来说不是唯一的, 它是一条从左下角延伸到右上角的曲线. 左下角是低风险低收益, 右上角是高风险高收益. 怎么在有效边界上选择依赖于个人的风险喜好. 有的投资者喜欢刺激, 也就是高风险高收益, 而有些投资者喜欢稳健, 也就是低风险低收益.

8. 方差最小化: 令

$$\mathbf{m} = (\mu_1, \cdots, \mu_n), \ \mathbf{w} = (w_1, \cdots, w_n).$$

用右上标 T 表示矩阵的转置. 那么投资组合收益率 K_V 的期望与标准差分别为

$$\begin{aligned} \mu_V &= \mu(\mathbf{w}) = \mathbf{m}\mathbf{w}^T, \\ \sigma_V &= \sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}C\mathbf{w}^T}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

方差 $\sigma^2(\mathbf{w})$ 是 $\mathbf{w}$ 的一个正定二次型. 注意 σ_V^2 作为 $\mathbf{w}$ 的函数是一个 n 维的抛物面, 象一个巨大的碗. 限制条件

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$$

代表 $\mathbf{w}$ 面上的一个超平面, 上面这个巨碗上在这个超平面上的取值还是抛物面 (或者线), 它显然有最小值. 应用 Lagrange 乘数法可以容易地计算出在

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{1}C^{-1}}{\mathbf{1}C^{-1}\mathbf{1}^T}$$

时达到最小值, 其中 $\mathbf{1}$ 表示所有元素等于 1 的行向量. 这是一个整体最小值, 如果考虑不容许卖空的情况, 这个整体最小值点不一定在可许的区域内, 求局部的最小值会非常困难.

9. 期望收益线上的最小方差: 全部投资组合的风险最小值点意义不是很大, 因为很多投资人并不一定喜欢风险最小的那个投资组合. 另外一个有意思的问题是, 投资者可能要求一个固定期望收益 μ, 想从其中包含的投资组合中选择一个风险最小的投资组合, 也就是说算 $\sigma^2(\mathbf{w})$ 的最小值点? 这时相当于算 $\sigma^2(\mathbf{w})$ 在两个限制条件

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\mathbf{w}^T &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1, \\ \mathbf{m}\mathbf{w}^T &= w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots + w_n\mu_n = \mu \end{aligned} \tag{3.2}$$

下的最小值. 这是两个线性的约束条件, 再应用 Lagrange 乘数法得到在

$$\mathbf{w} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1}C^{-1}\mathbf{m}^T \\ \mu & \mathbf{m}C^{-1}\mathbf{m}^T \end{vmatrix} \mathbf{1}C^{-1} + \begin{vmatrix} \mathbf{1}C^{-1}\mathbf{1}^T & 1 \\ \mathbf{m}C^{-1}\mathbf{1}^T & \mu \end{vmatrix} \mathbf{m}C^{-1}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1}C^{-1}\mathbf{1}^T & \mathbf{1}C^{-1}\mathbf{m}^T \\ \mathbf{m}C^{-1}\mathbf{1}^T & \mathbf{m}C^{-1}\mathbf{m}^T \end{vmatrix}} \tag{3.3}$$

时达到最小值, 其中 $\mathbf{m}$ 是期望收益率行向量

$$\mathbf{m} = (\mu_1, \cdots, \mu_n).$$

10. 计算过程: 令

$$G(\mathbf{w}, x, y) = \mathbf{w}C\mathbf{w}^T - x(\mathbf{m}\mathbf{w}^T - \mu) - y(\mathbf{1}\mathbf{w}^T - 1),$$

其中 x, y 是 Lagrange 乘数. 由

$$\frac{\partial G}{\partial w_i} = 0$$

得到 n 个方程

$$2\mathbf{w}C - x\mathbf{m} - y\mathbf{1} = 0,$$

解出

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}x\mathbf{m}C^{-1} + \frac{1}{2}y\mathbf{1}C^{-1}. \tag{3.4}$$

结合两个限制条件得到两个方程

$$\begin{aligned} 1 = \mathbf{w}\mathbf{1}^T &= \frac{1}{2}x\mathbf{m}C^{-1}\mathbf{1}^T + \frac{1}{2}y\mathbf{1}C^{-1}\mathbf{1}^T, \\ \mu = \mathbf{w}\mathbf{m}^T &= \frac{1}{2}x\mathbf{m}C^{-1}\mathbf{m}^T + \frac{1}{2}y\mathbf{1}C^{-1}\mathbf{m}^T. \end{aligned}$$

由此解出 x, y 代入 (3.4) 得到 (3.3).

11. 这时实际上存在两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 使得

$$\mathbf{w} = \mathbf{a}\mu + \mathbf{b},$$

而且不难看出

$$\mathbf{a}\mathbf{1}^T = 0,\ \mathbf{b}\mathbf{1}^T = 1.$$

代入得

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\mathbf{a}\mu + \mathbf{b})C(\mathbf{a}\mu + \mathbf{b})^T \\ &= (\mathbf{a}C\mathbf{a}^T)\mu^2 + 2\mathbf{b}C\mathbf{a}^T \cdot \mu + \mathbf{b}C\mathbf{b}^T, \end{aligned}$$

在风险期望平面上满足上述方程的 (σ, μ) 是双曲线的一支. 这样有效边界就很清楚了, 它是这条双曲线的上半支, 投资者应该从其中选择投资组合. 因为其中的每个点代表的投资组合都是最优的, 也就是说没有比它更好的投资组合, 而其它任何一个投资组合都不是最优的.

第 四 讲　资产组合选择理论 II

1. Markowitz 子弹: 把所有可许投资组合收益率的风险 - 期望 (σ_V, μ_V) 在风险期望平面上用点表示出来, 称为可许区域, 在容许卖空时, 情况很简单, 当 $n = 2$ 时, 这是一支双曲线, 当 $n \geq 3$ 时, 得到的是一个由双曲线族组成的区域, 其边界就是上面提到的最小风险双曲线, 所以这个区域外形如同一个子弹头, 称为 Markowitz 子弹. 它的边界的上半支就是组合前沿或者有效边界. 但是在不许卖空的情况下, 情况要复杂得多, 可许区域是三角区域

$$w_1 + \cdots + w_n = 1,\ w_1 \geq 0, \cdots, w_n \geq 0$$

   在由 (3.1) 定义的映射 $(\sigma(\mathbf{w}), \mu(\mathbf{w}))$ 之下的象空间. 这时, 求它的最小风险曲线就不能使用 Lagrange 乘数法.

2. 例: 考虑三个证券, 期望收益

$$\mathbf{m} = (0.1, 0.15, 0.2),$$

   协方差矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0.0784 & -0.0067 & 0.0175 \\ -0.0067 & 0.0576 & 0.0120 \\ 0.0175 & 0.0120 & 0.0625 \end{pmatrix}.$$

   最小方差投资组合

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{1}C^{-1}}{\mathbf{1}C^{-1}\mathbf{1}^T} = (0.316, 0.439, 0.245),$$

   其风险 - 期望点为

$$(\sigma_V, \mu_V) = (0.162, 0.146).$$

在给定期望收益率 μ 的条件下, 最小方差在

$$\mathbf{w} = (1.578 - 8.614\mu, 0.845 - 2.769\mu, -1.422 + 11.384\mu)$$

处达到

$$\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}C\mathbf{w}^T} = \sqrt{0.237 - 2.885\mu + 9.85\mu^2}.$$

3. 资本市场线: 如果还有一个固定收益率 r 的无风险资产, 那么我们可以从有效边界找到理论上最好的一个投资组合. 这时所有期望收益 μ 小于 r 的投资组合 (σ, μ) 不必考虑, 对于 $\mu > r$ 的投资组合 (σ, μ), 它与无风险资产的组合位于连接 $(0, r)$ 与 (σ, μ) 的直线上, 显然如果有两个投资组合 (σ, μ) 与 (σ', μ'), 把它们分别与 $(0, r)$ 连接的直线画出来, 上面那条直线显然是更好的选择, 这样我们只需要找到有效边界上那个点, 使得它与 $(0, r)$ 连接的直线位于所有直线的最上面, 这当然就是过 $(0, r)$ 且与有效边界曲线相切的那条直线, 称为**资本市场线**, 理性的投资者应该选择这条线上的投资组合.

4. 怎么找资本市场线: 连接 $(\sigma(\mathbf{w}), \mu(\mathbf{w}))$ 与 $(0, r)$ 的直线斜率为

$$k(\mathbf{w}) := \frac{\mu(\mathbf{w}) - r}{\sigma(\mathbf{w})},$$

其中 $\sigma(\mathbf{w}) = \sqrt{\mathbf{w}C\mathbf{w}^T}$, $\mu(\mathbf{w}) = \mathbf{w}\mathbf{m}^T$. 从数学角度看, 我们只需要在约束条件 $w_1 + \cdots + w_n = 1$ 下找到使得这个斜率最大的 $\mathbf{w}$ 就可以了. 还是应用 Lagrange 乘数法, 令

$$f(\mathbf{w}, t) = k(\mathbf{w}) + t(\mathbf{1}\mathbf{w}^T - 1).$$

求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial w_i} = \frac{\mu_i}{\sigma(\mathbf{w})} - (\mathbf{m}\mathbf{w}^T - r)\frac{\sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} w_j}{\sigma(\mathbf{w})^3} - t = 0,$$

化简得

$$\mu_i\sigma(\mathbf{w})^2-(\mathbf{m}\mathbf{w}^T-r)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}w_j-t\sigma(\mathbf{w})^3=0. \tag{4.1}$$

两边乘以 w_i 然后对 i 求和得

$$\mathbf{m}\mathbf{w}^T\sigma(\mathbf{w})^2-(\mathbf{m}\mathbf{w}^T-r)\mathbf{w}C\mathbf{w}^T-t\sigma(\mathbf{w})^3=0,$$

推出

$$t=\frac{r}{\sigma(\mathbf{w})}.$$

把它代回 (4.1) 得

$$\mu_i\sigma(\mathbf{w})^2-(\mathbf{m}\mathbf{w}^T-r)\sum_{j=1}^{n}\sigma_{i,j}w_j-r\sigma(\mathbf{w})^2=0, \tag{4.2}$$

写称为向量表达式

$$\mathbf{m}\sigma(\mathbf{w})^2-(\mathbf{m}\mathbf{w}^T-r)\mathbf{w}C-r\sigma(\mathbf{w})^2\mathbf{1}=\mathbf{0}.$$

也就是说

$$(\mu(\mathbf{w})-r)\mathbf{w}C=(\mathbf{m}-r\mathbf{1})\sigma(\mathbf{w})^2, \tag{4.3}$$

因此存在常数 c 使得

$$\mathbf{w}=c\cdot(\mathbf{m}-r\mathbf{1})C^{-1}, \tag{4.4}$$

即所求的权重 $\mathbf{w}$ 与 $(\mathbf{m}-r\mathbf{1})C^{-1}$ 同向, 这样再应用条件 $\mathbf{w}\mathbf{1}=1$ 的条件可计算 $\mathbf{w}$.

5. 例: 还是利用上面的例子中的三个风险证券, 再有一个无风险证券, 收益率为 $r=5\%$, 我们可以计算市场资产组合, 先算

$$(\mathbf{m}-r\mathbf{1})C^{-1}=(0.293,1.341,2.061),$$

因为 $\mathbf{w}$ 是这个向量的常数倍, 而 $\mathbf{w}$ 的分量之和等于 1, 所以推出

$$\mathbf{w}=\frac{1}{0.293+1.341+2.061}(0.291,1.341,2.061)=(0.079,0.363,0.558).$$

6. 风险溢价: 给定无风险利率 $r>0$, 在风险期望平面上过 $(0,r)$ 点与有效边界相切的直线是资本市场线, 上面给出了切点代表的投资组合的权重 $\mathbf{w}$, 它对应的投资组合称为**市场资产组合**, 它的风险期望为

   $$(\sigma(\mathbf{w}),\mu(\mathbf{w})),$$

   有时写为 (σ_M,μ_M). 这样资本市场线的方程为

   $$\mu=r+\frac{\mu_M-r}{\sigma_M}\sigma.$$

   每一个理性的投资者都会在资本市场线上选择合适的投资组合. 右边的第一项是利率, 第二项称为**风险溢价**(risk premium), 它是对投资者愿意承担的风险带来的期望回报.

7. beta 因子: 下面我们来看一个固定投资组合收益 K_V 与市场资产组合收益 K_M 之间的关系, 把对应的点 (K_M,K_V) 标示出来, 通常是通过回归的方法来寻找最佳拟合线, 称为**回归线**或者**特征线**. 寻找 α, β 使得

   $$\mathbb{E}[(K_V-(\alpha+\beta K_M))^2]$$

   最小. 这是典型的最小二乘, 很容易地算出

   $$\begin{aligned}\beta_V&=\frac{\mathrm{cov}(K_V,K_M)}{\sigma_M^2}=\rho_{V,M}\cdot\frac{\sigma_V}{\sigma_M};\\ \alpha_V&=\mu_V-\beta_V\mu_M.\end{aligned}$$

我们称上面的 β_V 为给定投资组合 V (或者单个证券) 的beta **因子**. beta 因子是给定资产组合的收益随着整个市场行为预期变化的指标. 特征线的方程为

$$y = \beta_V x + \alpha_V.$$

令

$$\varepsilon_V = K_V - (\alpha_V + \beta_V K_M),$$

那么

$$\sigma_V^2 = \mathsf{var}(\varepsilon_V) + \beta_V^2 \sigma_M^2,$$

其中第一项是残差方差, 是可分散风险; 第二项是系统风险或不可分散风险. 怎么解释呢? 我们可以把第 i 种资产的收益率写为

$$K_i = \alpha_i + \beta_i K_M + \varepsilon_i,$$

其中 $\{\varepsilon_i\}$ 是期望为零且互相独立的随机扰动, 它的期望收益是 $\mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_i$, 方差为

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_i^2 + \mathsf{var}(\varepsilon_i).$$

那么投资组合的收益率

$$K_V = \sum_i w_i K_i = \sum_i \alpha_i w_i + K_M \sum_i \beta_i w_i + \sum_i \varepsilon_i w_i,$$

它的风险

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_M^2 \sum_{i,j} w_i w_j \beta_i \beta_j + \sum_i w_i^2 \mathsf{var}(\varepsilon_i^2)}.$$

如果 $w_i = 1/n$, 那么后面那一项当 n 趋于无穷时趋于零, 也就是说随着资产种类增加, 它将最终消失.

8. 风险溢价: 我们知道市场会因为投资者投资风险资产而给予相应的风险溢价, 但是实际上市场只会给予系统风险或者不可分散风险相应的风险溢价, 不会给予可分散风险任何溢价, 因为它们是可以通过分散投资消除的风险.

9. 再看 beta 因子: 从 (4.2) 看出

$$(\mu_i - r)\sigma_M^2 = (\mu_M - r)\sum_j \sigma_{i,j} w_j,$$

那么

$$\mu_i = r + \beta_i(\mu_M - r), \tag{4.5}$$

其中

$$\beta_i = \frac{\sum_j \sigma_{i,j} w_j}{\sigma_M^2} = \frac{\operatorname{cov}(K_i, K_M)}{\sigma_M^2}$$

是第 i 种风险资产的 beta 因子. 在实践中, (4.5) 是重要的, 在能够估计期望收益和 beta 因子的情况下, 它可以给投资者发出关于这个证券的定价是过高还是过低的清楚信号. 另外, 由此等式推出对任何投资组合 V,

$$\mu_V = r + \beta_V(\mu_M - r),$$

其中 β_V 是上面所定义的 beta 因子

$$\beta_V = \frac{\operatorname{cov}(K_V, K_M)}{\sigma_M^2},$$

衡量投资组合的市场风险大小, $\frac{\mu_V - r}{\beta_V} = \mu_M - r$ 是市场风险溢价, 即承担 1 单位市场风险的超额回报率, 也称为 Treynor 比率. 最后, 投资组合 V 的风险收益 (σ_V, μ_V) 与无风险资产 $(0, r)$ 的连线斜率

$$k_V = \frac{\mu_V - r}{\sigma_V}$$

的最大值在市场资产组合 (σ_M, μ_M) 处达到, 它们的比值为

$$\rho = k_V/k_M = \beta_V \cdot \frac{\sigma_M}{\sigma_V} = \frac{\operatorname{cov}(K_V, K_M)}{\sigma_V \sigma_M} = \rho_{V,M},$$

也就是说, 它恰好是投资组合收益与市场资产组合收益的相关系数.

第 五 讲　二项期权模型

摘要 随机分析在金融中的应用首先是在期权定价方面, 本章介绍直观简单的二项期权模型, 引入套利, 投资, 期权, 折现, 对冲等金融概念的数学描述, 并为等价鞅测度以及鞅表示等抽象的数学概念找到金融中的意义, 主要的思想是 Doob 的鞅基本定理, 通过本章的学习, 学生应该基本上理解了鞅的意义. 在接触金融数学之前我想提醒大家的是真实的世界可以被模拟, 但永远不可能被复制, 所以不要以为我们讲的是真的金融, 它只是理想的影子.

关键词
- 套利
- 期权
- 自融资策略
- 等价鞅测度
- 对冲
- 可复制定价

1. 一点历史: Itô 虽然有名, 但是他从来没有把他的结果应用于金融领域. 最早做这件事情是 1900 年法国著名数学家 H. Poincare 的博士生 Bachelier 的博士论文, 这篇论文从某个角度导出了 Brown 运动的转移概率密度, 这比现在通常认为是 A. Einstein 的功劳的那篇著名论文早了 8 年, 遗憾的是 Bachelier 的论文在当时太过超前, 因无人理解而被遗忘, 一直到 60 年后才被人重新看到, 所以现在认为金融数学的研究兴起于 1973 年左右 F.Black, M.Scholes, R.Merton 的一系列工作, 这时候, Itô 的随机分析框架已经完美. 尽管如此, 由于需要高深的数学工具, 基于连续时间随机分析的金融数学还是不易理解, 所以 1979 年 Cox, Ross, Rubinstein 把这套理论搬到离散时间场合, 使得它更透明和直观, 而且对我们理解随机分析有无穷的助益.

2. 所谓套利: 套利的英文是 arbitrage, 是指没有风险的收益. 也就是无论市场怎么变幻, 一定赚钱的策略. 严格地说, 存在一个策略 $\{H_n\}$, 使得 H 关于 X 的随机积分 Y_n 满足 $Y_n - Y_0 \geq 0$ (表示没有风险) 且 $\mathbb{P}(Y_n - Y_0 > 0) > 0$ (表示有正收益). 套利是任何一个赌场或者完备市场所不能容许的.

3. 换个概率: 对于一个随机现象, 我们常常忽略其中最重要的概率测度. 比如掷硬币和掷骰子, 其实都有一个概率在背后. 换个概率等于就是换个模型, 就如同一个人说硬币是公平的而另一个人说硬币不公平一样. 改变测度这种事情, 一般情况下是不可想象的笑话, 但在金融领域却非常有意义. 在不同的概率测度中, 等价的概率测度有特殊的含义. 设有样本空间 Ω, $\mathbb{P}$ 是其上的一个概率测度, 描述 Ω 中事件发生的可能性的大小. 如果 $\mathbb{Q}$ 是 Ω 上的另外一个概率, 且对任何事件 A, $\mathbb{P}(A) > 0$ 当且仅当 $\mathbb{Q}(A) > 0$, 那么说 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{Q}$ 是等

价的.

4. 随机性与度量: 理解等价概率测度不是一件容易的事情, 概率测度是对随机事件可能性的一种度量法则, 等价概率是一种新的度量法则, 但它保证不改变随机性, 也就是说不会把随机的事件变成确定性, 也不会把确定性的事件变成随机的. 比如说随机变量 ξ 本来等概率地取值 $1, -1$, 但在等价测度下, 它取值还是 $1, -1$, 只不过概率改变了, 变成了 p, q. 说它不会把随机的事件变成确定的, 是指 p, q 肯定是正的, 因为如果 $p = 0$, 那么本来可能等于 1, 现在却变得不可能, 这改变了随机性; 说它不会把确定的事件变成随机的, 是指 $p + q = 1$, 因为如果 $p + q < 1$, 那么它必然把其它某个本来不可能取到的值变得可能取到, 这也改变了随机性.

5. 等价鞅测度: 如果有一个随机变量序列 $\{X_n\}$, 它在原概率 $\mathbb{P}$ 下可能不是鞅, 但是在某个与 $\mathbb{P}$ 等价的概率 $\mathbb{Q}$ 下是个鞅, 那么说 $\{X_n\}$ 有等价鞅测度. 设 $\{Y_n\}$ 是独立同分布随机序列, 期望大于 0, 那么 $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ 是下鞅. 它有没有等价鞅测度? 可以看出, 当 Y_n 的取值非负时 (这时套利存在), 它不可能有等价鞅测度, 但是当 $\mathbb{P}(Y_n < 0) > 0$ 时, 它一定有等价鞅测度. (显然当 X_n 是非负独立同分布随机序列的乘积时有类似的结论.) 这说明什么问题呢? 如果把 Y_n 看成赌博的输赢, 那么 Y_n 非负是说此人根本不会有输的可能性, 而当 $\mathbb{P}(Y_n < 0) > 0$ 时, 不管期望多大, 他存在输的可能性. 也就是说当输和赢的可能性都存在的时候, 等价鞅测度存在, 否则不存在. 看似简单, 这实际上是金融定价第一基本定理的雏形. 但第一基本定理的一般理论大概历经整个 1980 年代才日臻完善.

   定理5.1 (第一基本定理) 套利机会不会与等价鞅测度共存.

6. 简单金融市场: 包括一个存贷款利率均为 r 的货币市场和一个在时

刻 n 价格为 S_n 的股票市场. 我们假设股票的价格是独立同分布随机变量的乘积, 即

$$S_n = S_0\xi_1\xi_2\cdots\xi_n, \tag{5.1}$$

其中 $\{\xi_n\}$ 独立同分布, S_0 是股票发行价格. 如果 ξ_n 取两个正数值 d, u, $d < u$ 的概率分别为 q, p, $p + q = 1$, 当 ξ_n 取值 u 表示股票在时刻 n 涨, 否则表示跌. 那么我们说这是一个二项模型. 假设我们可以从银行无限制地存款或者贷款, 对于股票也可以随意买卖. 因为 S_n 随机, 故而围绕股票必然存在大量的投机行为. 投机与随机现象如影随形.

7. 无套利: 首先我们证明, 假设市场无套利, 则必有

$$d < 1 + r < u.$$

事实上, 如果 $1 + r \geq u$, 也就是说利率过高, 那么人们可以先卖出 (买空) 1 股股票, 获得资金 S_0, 存入银行, 在下一时刻取出存款买回股票, 获利为 $(1 + r)S_0 - S_1$, 因为 $1 + r \geq u > d$, 所以此随机变量是非负的, 而且以正概率大于 0, 因此市场存在套利. 同样我们可以证明如果利率过低 $1 + r \leq d$, 那么人们可以贷款去买股票而获得无风险收益, 故市场也有套利机会.

8. 期权: 期权是衍生证券, 因为它是依附于股票这样的证券体现价值的. 具体地说, 期权是一份合约, 以欧式买入期权为例, 它给予合约人在某个商定时间以商定价格购买股票的权利. 设商定时间是 m, 商定价格为 K, 如果到时候股票价格高于商定价格, 那么合约人是有利的, 获利为 $(S_m - K)$, 反之, 他无利可图, 只好放弃权利, 所以期权的价值是随机的, 等于

$$V_m := (S_m - K)^+. \tag{5.2}$$

美式的买入期权有所不同, 它赋予合约人在商定时间之前的任何时间都可以依商定价格 K 买入股票, 所以价值为

$$V_m := \max_{1\le i\le m}(S_i - K)^+. \tag{5.3}$$

一般地, 一个 n 时刻到期的衍生证券就是一个关于 $S_1, \cdots, S_n$ 可测的随机变量 V_n.

9. 前世今生: 期权是一种权利, 自然不会是免费的, 它应该卖多少钱自然是很有意义的问题, 尤其是对销售这种期权的代理机构来说, 对于他们来说, 最好自然是没有任何风险地销售期权以获得一份代理手续费. 这样的策略是否存在? 期权最初是作为一种金融创新推出的, 主要目的是降低在炒股时的风险. 比如某人看空股票, 因此大量出售股票以等待在低价的时候买入而获利, 但为了防止股票万一上涨带来的风险, 他愿意花钱买一份看涨期权合约, 这样以保证在他看走眼的情况下不至于损失太大. 但是后来的发展说明, 它更多地被投机者用于更疯狂地投机而成倍地放大了风险. 前几年的金融危机可以说就是由期权这类金融创新引起的.

10. 折现: 因为有利率为 r 的货币市场的存在, n 时刻的一元钱相当于 $n+1$ 时刻的 $1+r$ 元钱, 所以将来的钱在现在看来需要折现, 即 $n+1$ 时刻的 K 元钱在 n 时刻就只值 $K(1+r)^{-1}$ 元. 折现无非是一个约定, 不是什么本质的事情, 如果需要, 我们可以假设 $r=0$, 这不会对后面的讨论造成任何本质的不同. 另外, 在大多数情况下, $m=1$ 也足够说明问题了.

11. 定价: 期权合约是一个典型的随机产品, 和赌场的随机产品完全类似. 所以首先想到的定价方法是大数定律, 即价格应该是随机产品

的期望值折现

$$(1+r)^{-m}\mathbb{E}[V_m]. \tag{5.4}$$

在没有其它办法的情况下, 这是唯一的选择, 这种定价的思想很简单, 但是蕴含巨大的风险, 无法消除, 尽管它的风险随着样本量 (购买量) 的增加而减少, 这和期权代理机构的初衷是不符的. 另外这个定价与概率 p 有关, 在实际情况下, 这个概率很难准确计算. 那么下面介绍的期权定价的思想绝对是非常漂亮的.

12. 思想的简单描述: 期权定价的思想是说通过期权合约的获利可以通过对股票的投资获得.

13. 怎么办: 假如我有初始资金 x_0, 我能不能通过投资股票赚到期权的价值 V_m, 不妨从 $m=1$ 开始. 我买 x 股股票, 花了 xS_0 元钱, 然后把剩下的钱 x_0-xS_0 存入银行, 这样就算是一个投资策略, 其中 x_0, x 是待定的参数. 这样到时刻 1, 我的股票价值 xS_1 而存入银行的钱价值 $(1+r)(x_0-xS_0)$, 合起来, 我的投资价值为

$$xS_1+(1+r)(x_0-xS_0).$$

我的目的只是赚回期权的价值给购买者, 所以我期望不管在什么情况下, 都有

$$\phi(S_1)=xS_1+(1+r)(x_0-xS_0), \tag{5.5}$$

其中 $\phi(S_1)$ 就是期权价值, 在欧式看涨的情形, $\phi(S_1)=(S_1-K)^+$.

14. 解方程: 上面的方程 (5.5) 是不是可能成立呢? 一般是不可能的, 因为我们要求的是在所有可能的情况下成立. 但是在我们这个二项模型的特别假设下恰好可能. $S_1=S_0\xi_1$ 只可能取两个值 S_0d 和 S_0u, 因此有

$$\phi(S_0d)=xS_0d+(1+r)(x_0-xS_0),$$

$$\phi(S_0u) = xS_0u + (1+r)(x_0 - xS_0).$$

正好解出两个未知量

$$x = \frac{\phi(S_0u) - \phi(S_0d)}{(u-d)S_0},$$
$$x_0 = (1+r)^{-1}\frac{(u-(1+r))\phi(S_0d) + ((1+r)-d)\phi(S_0u)}{u-d}. \quad (5.6)$$

也就是说, 只要一开始有 x_0 元钱, 代理商就可以通过以上投资获得与期权合约同样价值的钱, 所以这个期权合约至少应该卖这么多钱. 这样不管市场如何变幻, 代理商不会有任何损失. 所以 x_0 应该是期权价格, (5.6) 就是期权定价公式.

15. 完美的结局: 但是我们应该看到, 事情如此完美的原因是二项模型的假设, 非常的特殊.

16. 例子: 假设股票现在的价格是 50 元, 下个时刻以 3/4 的概率涨 20%, 1/4 的概率跌 20%. 某个顾客来买一份下一时刻到期的商定价格为 52 元的欧式看涨期权, 假设利率可以忽略不计, 那么期权的大数定律定价是

$$(60-52) \times 3/4 + 0 \times 1/4 = 6$$

元, 而按上面的定价公式, 期权的价格是

$$(60-52) \cdot \frac{20\%}{40\%} = 4$$

元, 上面的公式还告诉我们这么做来对冲风险, 先去银行借 16 元钱, 加上卖期权所得的 4 元钱买 2/5 股股票放着, 等到下一个时刻, 如果股票跌到 40 元, 那么期权不会来兑现, 我们卖掉股票得 16 元钱还给银行; 如果股票涨到 60 元, 那卖掉股票得 24 元, 还给银行 16 元, 再给期权持有人 8 元钱的所得.

17. 期权的杠杆作用: 我借上面这个例子来解释一下期权的杠杆作用. 比如某人有五万元钱, 他有信心股票会涨, 想借此大赚一笔, 如果买股票只能买 1000 股, 当股票上涨时, 抛出, 他赚一万元, 他觉得少, 又不想借钱, 就赌一下, 买期权, 可以买 12500 份期权, 如果股票涨了, 他每份期权赚 8 元, 共十万元, 也就是赚回五万元. 这就是期权对于某些人的意义, 但是别忘了, 如果他失算股票跌了, 那么期权成为一张废纸, 五万元血本无归; 而若你买的是股票, 你还有四万元在. 所以期权是杠杆, 既放大了潜在的收益也放大了风险, 总之 there is no free lunch.

18. 观察: 仔细观察期权定价公式 (5.6), 我们发现这个公式与 p 没有关系, 这是一个好消息, 因为 p 是一个令人头痛的数, 很难确定, 代表着风险. 另外公式中有两个和等于 1 的正数

$$\frac{u-(1+r)}{u-d},\ \frac{1+r-d}{u-d},$$

记后者为 p'. 这两个数有奇妙的作用, 我们可以重新定义概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 使得

$$\widehat{\mathbb{P}}(\xi_n = u) = p',\ \widehat{\mathbb{P}}(\xi_n = d) = 1-p',$$

那么 $\widehat{\mathbb{P}}$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个等价概率测度使得

$$\widehat{\mathbb{E}}(\xi_n) = d\frac{u-(1+r)}{u-d} + u\frac{1+r-d}{u-d} = 1+r,$$

这导致折现后的股票价格 $\{(1+r)^{-n}S_n\}$ 在 $\widehat{\mathbb{P}}$ 下成为一个鞅. 所以 $\widehat{\mathbb{P}}$ 是 $\mathbb{P}$ 在某种意义下的一个等价鞅测度, 而且我们也要看到, $\widehat{\mathbb{P}}$ 是使得 $\{(1+r)^{-n}S_n\}$ 成为鞅的唯一等价测度. 这就是金融定价理论的第二基本定理.

定理5.2 (第二基本定理) 期权有无风险定价当且仅当等价鞅测度唯一存在.

19. 再看定价公式: 用等价测度, 定价公式 (5.6) 可以写成为

$$x_0 = (1+r)^{-1}[q'\phi(S_0 d) + p'\phi(S_0 u)] = (1+r)^{-1}\widehat{\mathbb{E}}[V_1],$$

其中 $V_1 = \phi(S_1)$, 它是期权合约的收益在新概率下的期望值折现, 与大数定律的定价公式 (5.4) 形式相同, 只是概率不同. 更一般地, 以时间 m 为商定时间的衍生证券 V_m 在 0 时刻的售价应该是

$$x_0 = (1+r)^{-m}\widehat{\mathbb{E}}[V_m]. \tag{5.7}$$

下面我们试着进行证明.

20. 投资: 这里投资决策的意思就是决定在时刻 k 拿多少钱买股票. 假设在所有 X_k 的财富里, 拿钱买 (卖) H_k 份股票, 把剩下的存入 (贷) 银行. 那么在下一刻的财富总值为

$$X_{k+1} = H_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - H_k S_k), \tag{5.8}$$

一个投资序列 $\{H_k\}$ 对应着一个财富序列 $\{X_k\}$. 将上式化简得

$$\begin{aligned}&(1+r)^{-k-1}X_{k+1} - (1+r)^{-k}X_k \\ &= H_k\left((1+r)^{-k-1}S_{k+1} - (1+r)^{-k}S_k\right).\end{aligned}$$

我们知道 $\{(1+r)^{-k}X_k\}$ 与 $\{(1+r)^{-k}S_k\}$ 分别是财富和股票价格的折现序列, 前者是 $\{H_k\}$ 关于后者的随机积分. 因为后者关于概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 是鞅且 H_k 关于 $\{S_1, \cdots, S_k\}$ 可测, 所以根据 Doob 的鞅基本定理知 $\{(1+r)^{-k}X_k\}$ 关于概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 也是鞅, 即折现后的财富在新测度下也是一个鞅.

21. 自融资: 这里有个重要概念顺便介绍一下, 自融资的意思差不多是自明的, 指在投资过程中除了一开始的资金外不再加入或者取出资

金. 看方程 (5.8), 令 $B_k := X_k - H_k S_k$, 这是投资股票后的余额放入银行, 在下一时刻, $B_{k+1} = (1+r)B_k$, 因此

$$X_{k+1} - X_k = H_k(S_{k+1} - S_k) + (B_{k+1} - B_k), \tag{5.9}$$

也就是说财富的增加来自股票的增值和银行的利息, 没有其他来源, 这就是自融资.

22. 定价: 如果我们有初始资金 x_0, 想通过投资 $\{H_k : 0 \le k < m\}$ 在商定时间 m 达到与期权合约 V_m 一样的财富, 即 $X_m = V_m$, 那么鞅的期望不变性得

$$x_0 = (1+r)^{-m}\widehat{\mathbb{E}}[X_m] = (1+r)^{-m}\widehat{\mathbb{E}}[V_m].$$

这样证明了我们的定价公式.

23. 可复制定价: 仔细的读者可能看出, 上面的公式是有一个先决条件的, 也就是存在 $\{H_k : 0 \le k < m\}$ 使得 $X_m = V_m$. 为了简单, 让我们在 $r = 0$ 的假设下解释这个问题. 如果 $\{H_k\}$ 存在, 那么我们就有一个真实存在的投资方法在股市上赚到 V_m, 所以这样的定价也称为可复制定价, 因为期权的赚钱目标可以通过股票投资来实现. 那么 $\{H_k\}$ 存在意味着什么呢? 这正是前面所说的鞅表示问题. $\{S_n\}$ 在新测度 $\widehat{\mathbb{P}}$ 下是鞅, 它的鞅流记为 $\{\mathscr{F}_n\}$. 因为 V_m 是预先知道的期权在 m 时刻的价值, 令

$$V_k = \widehat{\mathbb{E}}(V_m|\mathscr{F}_k),$$

那么 $(V_k : 1 \le k \le m)$ 是关于鞅流的鞅, V_k 就是期权在 k 时刻的无风险价格, 它由 V_m 唯一确定. 如果关于鞅流的鞅可以鞅表示, 那么存在 $\{H_k\}$ 使得相应的随机积分 $X_k = V_k$ 对所有 $1 \le k \le m$ 成立, 问题就解决了.

24. 具体操作: 还是假设 $r = 0$, 否则你让折现后的 S_n 当做 S_n 处理就可以了. 从 m 时刻开始,

$$V_m - V_{m-1} = H_{m-1}(S_m - S_{m-1}),$$

其中 V_m 是 $S_1, \cdots, S_m$ 的函数, H_{m-1} 和 S_{m-1} 是 $S_1, \cdots, S_{m-1}$ 的函数. 假设我们在 $m-1$ 时刻, 这时 $S_1, \cdots, S_{m-1}$ 是已知的, 我们要解 V_{m-1} 和 H_{m-1}. 因为 S_m 相对于 S_{m-1} 有两种可能性 $S_{m-1}u$ 和 $S_{m-1}d$, 所以我们得到两个方程

$$\begin{cases} V_m(S_1, \cdots, S_{m-1}, uS_{m-1}) - V_{m-1} = H_{m-1}S_{m-1}(u-1); \\ V_m(S_1, \cdots, S_{m-1}, dS_{m-1}) - V_{m-1} = H_{m-1}S_{m-1}(d-1). \end{cases}$$

恰好两个方程两个未知量, 解得

$$\begin{aligned} H_{m-1} &= \frac{V_m|_u - V_m|_d}{S_{m-1}(u-d)}; \\ V_{m-1} &= \frac{(u-1)V_m|_d + (1-d)V_m|_u}{u-d} = \widehat{\mathbb{E}}[V_m|S_1, \cdots, S_{m-1}]. \end{aligned}$$

25. 定价与投资策略: 一般地, 对 $0 < k \le m$ 有

$$\begin{aligned} H_{k-1} &= \frac{V_k|_u - V_k|_d}{S_{k-1}(u-d)}; \\ V_{k-1} &= \frac{(u-1)V_k|_d + (1-d)V_k|_u}{u-d} = \widehat{\mathbb{E}}[V_m|S_1, \cdots, S_{k-1}]. \end{aligned}$$

其中 $V_k|_u = V_k|_{\xi_k=u}$, $V_k|_d = V_k|_{\xi_k=d}$.

26. 习题: 设 ξ 是非负随机变量, 证明: $\mathbb{P}(\xi > 0) > 0$ 当且仅当 $\mathbb{E}\xi > 0$.

27. 习题: 设有一股票现在时刻 0 的价格是 50 元, 在每个时间段都以 3/4 的概率上涨 20%, 以 1/4 的概率下跌 20%, 假设利率可以忽略,

某个顾客欲在证券代理公司购买在时刻 2 到期的商定价格为 52 元的欧式看跌期权, 也就是说他有在时刻 2 以 52 元的价格卖给代理公司一股股票的权利, 问这份期权应该卖多少钱? 代理公司应该怎么投资来对冲风险, 如果时刻 1 股票下跌, 这份期权还值多少钱? 代理公司又应该怎么操作?

28. 习题: 假设上题中的存贷款的利率是 $r = 5\%$, 相应的问题应该怎么做?

29. 习题: 如果 (5.1) 中的 ξ_n 取值 $0 < u_1 < u_2 < u_3$ 的概率分别为 p_1, p_2, p_3, 其中 p_1, p_2, p_3 是正的且和为 1, 问存在概率测度使得折现后的价格过程 $\{(1+r)^{-n}S_n\}$ 成为鞅的条件是什么? 唯一吗?

第 六 讲　套利定价基本定理

1. 前面我们就两种特殊情况讨论了期权的定价问题: 二项期权模型与 Black-Scholes 模型. 这两种情况下, 我们可以得到期权定价的显式表达式. 在一般不假设资产的价格变化满足某种特殊条件的情况下, 自然不能期望得到什么显式的表达式, 但是一些基本的原理仍然是对的, 这使得我们可以理解金融中那些更本质的规律. 这里的主要工具是鞅, 鞅这个简单神奇的数学理论可以用来解释金融中很多复杂的现象. 可以认为, 鞅论的建立者是美国数学家 J.L.Doob, 他的经典的著作 ‘Stochastic Processes’ 是鞅论的圣经.

2. 鞅的定义: 设有概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ 和信息流 $\{\mathscr{F}_t\}$, 即 $\mathscr{F}_t$ 理解为关于风险资产价格到时刻 t 为止的所有信息. 一个随机过程 $\{X_t\}$ 称为是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应的, 如果对任何的 t, X_t 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的, 这简单地说, 是到时刻 t, X_t 就完全知晓了. 可测是一个重要概念, 这个名词已经解释了这个概念. 股票价格过程是适应的随机过程. 一个适应的随机过程称为是鞅, 如果对任何时间 $t > s$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s.$$

3. 鞅的解释: $X_t - X_s$ 称为是随机过程的增量, 鞅等价于说增量关于时刻 s 前的信息的条件期望为零, 或者说基于过去对将来收益的预测等于零. 条件期望是期望概念的推广, 期望是无信息预测, 条件期望是基于部分信息的预测. 注意数学上对条件期望随机变量的要求是可积, 我们在这里不多纠缠于细节. 鞅是公平的代名词, 通常赌博中的财富积累过程是鞅, 也就是说赌博中的随机性是不偏向于任何一方的.

4. 下鞅上鞅: 把鞅定义中的等于号改为大于等于号

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s,$$

这时 $\{X_t\}$ 称为下鞅. 下鞅的增量关于时刻 s 的条件期望非负. 如果 $\{X_t\}$ 是自己的财富积累过程, 那么总体来说下鞅是对自己偏好的, 或者说有利的. 反之如果

$$\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s,$$

那么 $\{X_t\}$ 称为上鞅, 显然, 上鞅是对自己不利的.

5. 下鞅复合一个增且凸 (一阶与二阶导数都是非负的) 函数后仍然是下鞅, 即如果 $\{X_t\}$ 是下鞅, g 是增且凸的函数, 那么 $g(X_t)$ 是下鞅, 因为

$$g(X_s) \leq g(\mathbb{E}(X_t|\mathscr{F}_s)) \leq \mathbb{E}[g(X_t)|\mathscr{F}_s],$$

其中两个不等号分别利用增性和关于凸函数的 Jensen 不等式. 因此如果 $\{X_t\}$ 是下鞅, 则 $\{X_t^+\}$ 也是下鞅.

6. 类似地, 鞅复合一个凸函数后是下鞅. 所以当 $\{X_t\}$ 是鞅时, $\{|X_t|\}$ 与 $\{X_t^2\}$ 是下鞅.

7. 等价测度: 设 $\widehat{\mathbb{P}}$ 也是概率测度, 如果对任何事件 A, 有 $\mathbb{P}(A) > 0$ 等价于 $\widehat{\mathbb{P}}(A) > 0$, 或者说 $\mathbb{P}(A) = 0$ 等价于 $\widehat{\mathbb{P}}(A) = 0$, 那么称概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 与 $\mathbb{P}$ 等价. 给定随机序列 $\{X_n\}$, 如果存在等价测度 $\widehat{\mathbb{P}}$ 使得 $\{X_n\}$ 关于概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 是鞅, 那么说存在关于 $\{X_n\}$ 的等价鞅测度.

8. 最简单的情形: 设 X 是一个随机变量, 是不是存在等价测度 $\widehat{\mathbb{P}}$, 使得 X 的期望为零, 即 $\widehat{\mathbb{E}}[X] = 0$? 如果 X 关于 $\mathbb{P}$ 非负, 即 $\mathbb{P}(X < 0) = 0$, 那么 X 关于 $\widehat{\mathbb{P}}$ 也非负, 因此 $\widehat{\mathbb{E}}[X] = 0$ 等价于 $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, 推

出 $\mathbb{P}(X=0)=1$, 也就是说, 除非 $X=0$ 否则不存在这样的等价测度. 对 $\mathbb{P}(X>0)=0$ 的随机变量有同样的结论. 但是除了这两种情况, 的确会存在这样的等价测度. 留作习题. 所以等价鞅测度的存在描述这样的情形: 如果把随机变量看成未来收益的话, 赚和赔的可能性都真的存在.

9. 例: 设 X 的分布为

$$\mathbb{P}(X=u)=p=1-\mathbb{P}(X=d),$$

其中 $d<u$, $p\in(0,1)$. 那么当 $d<x<u$ 时, 存在唯一的等价测度 $\widehat{\mathbb{P}}$ 使得 $\widehat{\mathbb{E}}[X]=x$. 首先在等价概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 之下, X 也只能取 d,u 两个值, 那么

$$\widehat{E}[X]=qu+(1-q)d,$$

其中 $q=\widehat{\mathbb{P}}(X=u)$. 因此 $\widehat{\mathbb{E}}[X]=x$ 蕴含着唯一解

$$q=\frac{x-d}{u-d},$$

但是 $0<q<1$, 故而 $d<x<u$.

10. 投资: 设 $\{S_n\}$ 是风险资产价格, 每个 S_n 可以是随机向量以表达多种风险资产. 固定另外一个随机序列 $\{H_n\}$, 定义随机序列 $\{X_n\}$ 为

$$X_n-X_{n-1}=H_{n-1}(S_n-S_{n-1}),\ X_0=x_0, \tag{6.1}$$

或者说

$$X_n=x_0+H_0(S_1-S_0)+H_1(S_2-S_1)+\cdots+H_{n-1}(S_n-S_{n-1}).$$

也就是说 X 的增量来自 S 的增量与 H 的乘积. 这样的定义有直观的含义, 首先看一个赌局, 如果 $\{S_n\}$ 是坐在赌桌上的某人的财富

过程, 也属于风险资产, 其第 n 局的收益是 $S_n - S_{n-1}$, 那么 $\{X_n\}$ 是旁边的某人的财富过程, H 是他 '投资' 在赌桌上此人的策略, 其第 n 局的收益是

$$H_{n-1}(S_n - S_{n-1}).$$

再看股票投资, 如果 S_n 是时刻 n 的股票价格, 投资人在时刻 $n-1$ 买入 H_{n-1} 股, 那么他的资产总数为 $X_{n-1} = H_{n-1}S_{n-1}$, 到下个时刻股票价格变为 S_n, 投资人的资产变成

$$X_n = H_{n-1}S_n.$$

因此

$$X_n - X_{n-1} = H_{n-1}(S_n - S_{n-1}),$$

也就是说财富的改变来自股票价格的改变. 这样的投资策略称为是自融资投资策略.

11. 随机积分: 由 S 和 H 来定义 X 的方式 (6.1) 是非常一般的, 但是作为一种投资形式的财富过程, 这里有一个非常关键的地方就是 H 的适应性, 也就是说, 投资人是决定时刻 $n-1$ 的投资策略时, 他是不知道 n 时刻的资产变化情况的, 即 H_{n-1} 是关于

$$S_1, \cdots, S_{n-1}$$

可测的. 这是符合实际的, 投资人一般来说没有未卜先知的能力. 当 H 满足这个可测性条件时, 我们说 (6.1) 定义的 X 是 H 关于 S 的随机积分.

12. Doob 引理: (1) 如果 S 是鞅, 那么 H 关于 S 的随机积分也是鞅. 事实上, 由条件期望的性质, 因为 H_{n-1} 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的, 故

$$\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}] = H_{n-1}\mathbb{E}[S_n - S_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}] = 0.$$

类似地, (2) 如果 S 是下鞅, H 是非负的, 那么 H 关于 S 的随机积分是下鞅. 这两个结果都很直观, 一个说对于一个公平的赌博, 无论你使用什么策略去赌, 只要你不能未卜先知, 那么结果不会对你更为有利. 另一个说对于一个对己有利的赌博, 只要每次都是顺势而为, 那么结果仍然对你有利. Doob 的这个定理简单直观, 乃天籁之声, 是随机分析的基石, 整个随机分析乃至金融数学的大厦建于其上.

13. 停时: 随机时间不陌生, 比如我们说, 什么时候我才能赚够一套房子的钱啊? 什么时候我买的那股票会翻倍啊? 我打算把股票在最高点抛掉, 等等. 这里面的时间都是不确定的 (而且可能永远达不到), 所以是随机时间. 我们介绍一类比较特殊非常重要的随机时间. 一个随机时间 T 称为停时, 如果它是否发生在时刻 n 可以由时刻 n 前的信息来判断. 停时的概念是非常直观的, 上面说的赚够一套房子钱和股票翻倍的这两个时间是停时, 因为无论到什么时候, 你都可以根据你掌握的信息判断这两个目标是否已经达到, 比如看看手里的钱, 看看房子的价格. 股票最高点这个时间不是停时, 因为你要判断现在的股价是不是在最高点, 只用以前和现在的信息是不够的, 你还要知道未来, 因为最高点是整体的概念. 但如果你只是要一个新高, 那么过去和现在的信息就能判断. 所以停时是一个可根据过去和现在的信息判断是否达成的随机时间. 用数学语言表达, 对任何的 n,
$$\{T = n\} \in \mathscr{F}_n.$$
当然固定时间是停时.

14. 停止过程: 对于两个数 a, b, 用 $a \wedge b$ 表示其中小的那个数. 如果

$\{X_n\}$ 是随机过程, T 是随机时间, 定义

$$X_n^T = X_{T\wedge n},\ \forall n,$$

那么 $X^T = \{X_n^T\}$ 也是随机过程, 它在 $n \le T$ 时与 $\{X_n\}$ 一样, 在 $n > T$ 时, 它停止在 X_T 处, 所以称为停止过程. 以赌博为例直观地看, 停止就是赌徒站起离开不玩了, 也是一种策略, 而且因为无法未卜先知, 这种策略也不能改变态势. 我们怎么来找到 $\{H_{n-1}\}$ 使得

$$X_{T\wedge n} - X_{T\wedge(n-1)} = H_{n-1}(X_n - X_{n-1})?$$

首先当 $n-1 \ge T$ 时, $T\wedge n = T = T\wedge(n-1)$, 故 $X_{T\wedge n} - X_{T\wedge(n-1)} = 0$; 当 $n \le T$ 时, $T\wedge n = n$ 且 $T\wedge(n-1) = n-1$. 因此

$$X_{T\wedge n} - X_{T\wedge(n-1)} = 1_{\{n\le T\}}(X_n - X_{n-1}).$$

也就是说

$$H_{n-1} = 1_{\{n\le T\}} = 1 - 1_{\{n>T\}}.$$

因为

$$1_{\{n>T\}} = 1_{\{T=1\}} + \cdots + 1_{\{T=n-1\}},$$

且 T 是停时, 所以 $1_{\{n>T\}}$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的, 推出 H_{n-1} 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的而且当然是非负的. 因此由 Doob 引理推出一个鞅的停止过程还是鞅, 一个下鞅的停止过程还是下鞅.

15. 套利: 套利是指无风险赚钱的机会. 以数学的语言来说, 设 $\{S_n\}$ 是风险资产的价格过程, 说它有套利, 是指存在一个投资策略 $\{H_n\}$ 和某个时刻 m, 如果用 $\{X_n\}$ 表示 H 关于 S 的随机积分, 那么有

$$X_0 = 0,\ X_m \ge 0,\ \mathbb{P}(X_m > 0) > 0.$$

上面的 $X_0 = 0$ 指投资不需要本钱, $X_m \geq 0$ 指在时刻 m 不赔钱, 所以投资无风险, 最后一个条件是说赚钱的概率是正的. 注意在 $X_m \geq 0$ 的前提下, $\mathbb{P}(X_m > 0) > 0$ 与 $\mathbb{E}[X_m] > 0$ 是等价的. 在现实中, 货币总是有时间价值的, 也就是说有利率, 所以将来的资产价值在现在看起来必须折现, 设利率为 r. 一个无套利的市场通常称为有效市场.

定理6.1 (**第一基本定理**: **有效市场**) 包含多种风险资产 $\{S_n\}$ 的市场无套利当且仅当存在测度 $\widehat{\mathbb{P}}$ 使得其中任何资产在折现后

$$\{(1+r)^{-n}S_n\}$$

在这个测度下是鞅. $\widehat{\mathbb{P}}$ 称为等价鞅程度.

16. 衍生证券的定价: m 时刻到期的衍生证券 V_m 是关于

$$\{S_1, \cdots, S_m\}$$

可测的随机变量. 特别地, 风险资产本身也是衍生证券. 怎么给一个随机产品定价? 这是一个很难回答的问题. 通常来说, 按照大数定律, 应该以随机产品价值的数学期望来定义. 但是衍生产品不是一般的随机产品, 它的价值依附于另外一个称为风险资产的随机产品. 例如, 如果甲乙两个人去玩一个老虎机, 两个人玩一次的收益都是随机变量, 无法预先比较. 但是如果甲乙两个人都买一份同样的股票, 一个月后, 虽然股票的价值无法预测, 但是可以断定他们两个的收益是一样的. 这就是基于风险资产的随机产品和原始的随机产品的不同, 所以定价在这里的意义也不同. 如果市场无套利, 那么衍生证券的价格应该是衍生证券在鞅测度下的期望值, 称为无套利定价. 但这有两个问题, 第一, 它和大数定律定价一样存在风险; 第二, 使得风险资产成为鞅的测度是不是唯一? 如果不唯一, 定价就不唯

一. 从上面那个例子看, 金融市场上定价不唯一的金融产品必然会产生套利机会. 衍生证券的定价是指无风险定价, 它的意思是说**任何在衍生证券上的投资收益可以通过投资它所依的风险资产来获得**, 就是说风险是可以对冲的, 这样得到的定价称为无风险定价, 或者是可复制定价. 对冲策略存在的金融市场的完备市场, 下面的第二基本定理给出完备市场的数学解释.

定理6.2 (**第二基本定理**: **完备市场**) 第一基本定理中的等价鞅测度唯一当且仅当任何一个衍生产品的价值 V_m 都可以通过对风险资产的投资来获得, 即存在适应过程 $\{H_n\}$ 使得

$$\begin{aligned} V_m = V_0 &+ H_0(\widehat{S}_1 - \widehat{S}_0) + H_1(\widehat{S}_2 - \widehat{S}_1) \\ &+ \cdots + H_{m-1}(\widehat{S}_m - \widehat{S}_{m-1}), \end{aligned}$$

其中 $\widehat{S}_n = (1+r)^{-n} S_n$ 是资产折现. 满足这个性质的市场成为完备市场, 二项期权模型和 Black-Scholes 模型都是完备市场. 这时显然有 m 时刻执行的衍生证券 V_m 的价格应该是其折现值 $(1+r)^{-m}V_m$ 的关于等价鞅测度的期望, 即

$$V_0 = (1+r)^{-m}\widehat{\mathbb{E}}[V_m].$$

17. 基本定理的应用: 两个金融定价基本定理是在 1979 年到 1981 年三年间由 M. Harrison, D. Kreps, S.Pliska 三人的三篇论文完成的, 非常有用. 它的严格证明持续了一个年代才真正完成. 让我们介绍它的两个应用, 首先我们考虑远期价格的确定, 设 $\{S_n\}$ 是风险资产, 它的到期日 T 的远期价格为 F, 那么到期日远期的价值是 $S(T)-F$. 取等价鞅测度 $\widehat{\mathbb{P}}$, 这时因为远期在初始时刻没有价值, 所以

$$\widehat{\mathbb{E}}[S_T - F] = 0,$$

考虑折现因子, 推出远期价格为

$$F=\widehat{\mathbb{E}}[S_T]=(1+r)^T\widehat{\mathbb{E}}[(1+r)^{-T}S_T]=(1+r)^TS_0.$$

18. 美式期权的价值 (这部分要感谢汪敏同学纠正错误): 另外一个例子是美式看涨期权的价值, 美式看涨期权与欧式看涨期权的差别是美式可以在到期日前任何一个时间执行, 这个时间可以是随机时间, 但是它一定是停时, 因为投资者在判断是不是在给定时间执行期权时所具有的信息是基于这个时间以前的信息. 选择好一个停时 $\sigma\le T$, 如果期权在时刻 σ 执行, 那么因此选择在 σ 时刻执行的美式期权的价格应该是执行时价值折现后的期望, 即

$$V_0(\sigma)=\widehat{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\sigma}(S_\sigma-K)^+]$$

那么美式期权的价格应该为

$$V_0=\max_\sigma V_0(\sigma),$$

其中 σ 跑遍所有取值在 $[0,T]$ 之间的停时. 看起来美式看涨的价值要超过欧式看涨, 但实际上不会. 我们要证明

$$V_0=(1+r)^{-m}\widehat{\mathbb{E}}[(S_T-K)^+].$$

首先 $\ge$ 是显然的. 我们要证明对任何停时 σ,

$$\widehat{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\sigma}(S_\sigma-K)^+]\le\widehat{\mathbb{E}}[(1+r)^{-T}(S_T-K)^+].\tag{6.2}$$

因为 $\{(1+r)^{-n}S_n\}$ 关于 $\widehat{\mathbb{P}}$ 是鞅且 $r>0$, 故

$$\{(1+r)^{-n}(S_n-K):n\ge 1\}$$

是下鞅

$$\widehat{\mathbb{E}}(S_n|\mathscr{F}_{n-1}) = (1+r)S_{n-1} \geq S_{n-1},$$

再因为 $x \mapsto x^+$ 是递增的凸函数, 所以

$$\{(1+r)^{-n}(S_n - K)^+\}$$

是下鞅. 应用 Doob 的定理, 因为 $\sigma \leq T$, 所以 (6.2) 成立.

第 七 讲　期权定价公式

1. 上一章讲的是离散时间的期权定价公式, 但几乎所有人都会认为假设时间是连续变化的更符合实际情况, 所以这一章我们将减少连续时间的期权定价理论. 设时间 t 在区间 $[0,T]$ 中变化, 其中 T 可以理解为到期日, 0 为卖出期权的时间, 称为初始时间. K 为商定价格. $S=S(t)$ 是股票在时间 t 时的价格, 是个随机变量, 它们组成一个随机过程, 描述了股票的走势. 导出 Black-Scholes 期权定价公式的方法很多, 可以用离散时间逼近, 可以用鞅表示和测度变换的方法, 不管采用什么方法, 读者都需要对 Ito 的随机分析理论有相当的理解. 我们先介绍微分方程的方法, 它也是 Black 与 Scholes 在他们的经典论文中的方法.

2. 用 $V(S,t)$ 表示期权在 t 时刻的价格, 其中 $S=S(t)$. 这表示期权价格是时间 t 和 t 时刻的股票价格 $S(t)$ 的函数. 在到期日 $t=T$ 时, $V(S,T)$ 是已知的, 依赖于期权品种, 比如欧式看涨期权,

$$V(S,T)=(S(T)-K)^+;$$

欧式看跌期权

$$V(S,T)=(K-S(T))^+.$$

对于一般的随机过程 $S=S(t)$, V 的形式是算不出来的, 但在极特殊的假设下, Black 和 Scholes 奇迹般地得到了显式表达式.

3. 假设: $S=S(t)$ 是几何 Brown 运动, 股票价格应该是非负值的随机游动. 设 $B=B(t)$ 是标准 Brown 运动, 设 S 满足随机微分方程

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B(t), \tag{7.1}$$

由 Ito 公式可以把 S 解出来

$$S = S(0)\exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)\right), \tag{7.2}$$

其中 μ 是任意实数, σ 是正实数, 都是模型的参数, $S(0)$ 是初始价格. 也就是说这个模型有两个参数, 这是这个模型的自由度. 所以严格地说期权价格还和 K, μ 和 σ 有关. 随机分析中最重要的一点是 S 的两次变差不等于零, 由下面的公式计算

$$(\mathrm{d}S)^2 = \sigma^2 S^2 (\mathrm{d}B)^2 = \sigma^2 S^2 \mathrm{d}t.$$

4. Delta 对冲: 首先 Black & Scholes 认为以 $V(S,t)$ 的价格在 t 时刻卖出一份期权应该用买入
$$\frac{\partial V}{\partial S}$$
份股票来对冲风险. 这个量被称为 Δ, 这个思想称为 Δ 套期保值或 Delta 对冲. 为什么呢? 设买入 x 份股票改成一个投资组合
$$\Pi = xS - V,$$
那么当 $x = \Delta$ 时, Π 关于 S 的变化率为零, 即
$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = 0,$$
这说明局部地 (很小的时间) 看, Π 的价值不依赖于 S, 而 S 是其中唯一的风险来源, 也就是说, 投资组合 Π 局部地没有风险. 如果能够连续不断地依此调整投资组合, 那么就可以做到避免风险.

5. 另外一个思想是说, 如果没有了风险, 那么投资组合的所得应该等同于它投资于无风险资产的所得, 即
$$\mathrm{d}\Pi = r\Pi \mathrm{d}t, \tag{7.3}$$
否则就会产生套利, 这是成熟市场不容许发生的.

6. 给时间一个增量 $\mathrm{d}t$, 投资组合 Π 会有一个变化

$$\mathrm{d}\Pi = x\mathrm{d}S - \mathrm{d}V,$$

由 Ito 公式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 \\ &= \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}\Pi = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t,$$

代入 (7.3), 得微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = -r\left(\frac{\partial V}{\partial S}S - V\right),$$

化简得

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rV - rS\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \tag{7.4}$$

此方程被称为 Black-Scholes 方程, 并且 V 满足到期日条件 (终端条件, 与初值条件对应), 比如对于欧式看涨

$$V(S,T) = (S(T) - K)^+.$$

7. Black-Scholes 方程是一个抛物型的线性偏微分方程, 恰好是可解的, 因为它在一个变量代换后变成一个标准的热传导方程. 具体怎么把 Black-Scholes 方程化成热传导方程对非数学专业的人士来说并不重要, 但我们愿意在这里说说以满足某些学生的宝贵的好奇心.

   (a) 先想法消去 V 项, 这是利用指数函数求导不变性

$$\frac{\partial(\mathrm{e}^{r(T-t)}V)}{\partial t} = \mathrm{e}^{r(T-t)}\left(\frac{\partial V}{\partial t} - rV\right),$$

推出 $V'(S,t)=\mathrm{e}^{r(T-t)}V(S,t)$ 满足下面的方程

$$\frac{\partial V'}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V'}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V'}{\partial S}=0. \tag{7.5}$$

(b) 把时间倒过来, 令 $\tau=T-t$, 关于 t 的偏导数与关于 τ 的偏导数变号得

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 W}{\partial S^2}+rS\frac{\partial W}{\partial S}=0, \tag{7.6}$$

其中 $W(S,\tau)=V'(S,T-\tau)$, 终端值问题变成初值问题.

(c) 做替换 $S=\mathrm{e}^{\xi}$, 把变量 S 换成 ξ, ξ 的变换范围是实数. 容易验证

$$\frac{\partial W}{\partial \xi}=S\frac{\partial W}{\partial S},\ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi}=S\frac{\partial W}{\partial S}+S^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.$$

代入 (7.6) 得到一个常系数的微分方程

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial W}{\partial \tau}. \tag{7.7}$$

(d) 最后一个变换 $\xi=\sigma x-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau$, 令 $U(x,\tau)=W(\mathrm{e}^{\xi},\tau)$, 推出 U 满足经典的热传导方程

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{7.8}$$

(e) 再把 V 解出来

$$\begin{aligned}V(S,t)&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}V'(S,t)\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}W(\mathrm{e}^{\log S},T-t)\\&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}U(\log S/\sigma+\frac{1}{\sigma}(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t),T-t).\end{aligned}$$

8. 初值条件 $U(x,0)=f(x)$ 的热传导方程解是唯一的, 由热核表示如下

$$U(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\tau}\right)f(y)\mathrm{d}y.$$

设终端条件 $V(S,T)=v(S)$, 这等价于 U 的初始条件

$$U(x,0)=V(\mathrm{e}^{\sigma x},T)=v(\mathrm{e}^{\sigma x}).$$

因此 (为了简洁, 写 $T-t$ 为 τ)

$$\begin{aligned} V(S,t) &= \frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int \exp\left(-\frac{(\log S+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau-y)^2}{2\sigma^2\tau}\right)v(\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{e^{-r\tau}}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left(\log\frac{S}{u}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau}\right)v(u)\frac{\mathrm{d}u}{u} \end{aligned}$$

对于欧式看涨情况, $v(u)=(u-K)^+$, 用 Φ 表示标准正态分布, 那么

$$V(S,t)=S\cdot\Phi(d)-K\mathrm{e}^{-r\tau}\cdot\Phi(d-\sigma\sqrt{\tau}), \tag{7.9}$$

其中

$$d=\frac{\log(S/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

对于欧式看跌情况, $v(u)=(K-u)^+$, 那么

$$V(S,t)=-S\cdot(1-\Phi(d))+K\mathrm{e}^{-r\tau}\cdot(1-\Phi(d-\sigma\sqrt{\tau})). \tag{7.10}$$

9. 用随机分析的方法可以更为直观地解决这个问题, 并且免去了上面解这么一个偏微分方程的繁琐过程, 这也可以说是随机分析最漂亮的应用, 随机积分等的直观意义在这里可以充分展现. 不管连续时间还是离散时间, 期权定价的基本理论是类似的, 不同的是模型和定价公式. 设 $S=(S_t)$ 是股票在 t 时刻的价格, $r>0$ 是利率, 连续计利. 一个 T 时刻到期且商定价格是 K 的欧式看涨期权在 T 时刻的价值显然是

$$V_T=(S_T-K)^+=\max(0,S_T-K).$$

一般的衍生证券的在 T 时刻的价值是一个 $\mathscr{F}_T$ 可测的非负随机变量 V_T.

10. 自融资: 一个投资策略为 $H=(H_t)$ 的投资人在时刻 t 的财富为

$$X_t = H_t S_t + b_t,$$

其中 $H_t S_t$ 是投资在股票上的钱, b_t 是放在银行的钱, 银行的利率为 r, 连续复利 $\mathrm{d}b_t = rb_t\mathrm{d}t$. 由离散模型 (5.9) 看出, 自融资的意思是财富的增加仅来自股票的增值和银行利息

$$\mathrm{d}X_t = H_t \mathrm{d}S_t + \mathrm{d}b_t, \tag{7.11}$$

如同离散场合一样, 考虑折现后, 由分部积分公式推出

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}X_t) &= \mathrm{e}^{-rt}(-rX_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}X_t) \\
&= \mathrm{e}^{-rt}[-r(H_tS_t + b_t)\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}S_t + \mathrm{d}b_t] \\
&= H_t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}S_t),
\end{aligned}$$

即折现后财富的增加来自于股票折现后的增值, 因此初始投资为 $X_0 = x_0$ 的自融资创造的财富折现后为

$$\mathrm{e}^{-rt}X_t = X_0 + \int_0^t H_u \mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ru}S_u),$$

折现后的财富是 H 关于折现后股票价格的随机积分. 这里随机积分的直观性得到了淋漓尽致的体现.

11. 定价的思想: 如果我们能够找到一个概率测度 $\widehat{\mathbb{P}}$, 使得折现后股票价格在此概率下是鞅, 那么衍生证券在 0 时刻的价格应该是

$$V_0 = \mathrm{e}^{-rT}\widehat{\mathbb{E}}[V_T].$$

如果鞅可以表示, 那么由 V_T 确定的鞅

$$\mathrm{e}^{-rt}X_t := \mathrm{e}^{-rT}\widehat{\mathbb{E}}[V_T|\mathscr{F}_t]$$

可以由 H 关于鞅 $(\mathrm{e}^{-rt}S_t)$ 来表示, H 就是可以拿来对冲因为卖出一份期权所带来的风险的投资策略, 这时上面的价格称为可复制价格. 不可复制的价格实际上是没有意义的.

12. 例: 作为一个特例, 我们来讨论 Black-Scholes 的期权定价模型, Black 与 Scholes 模型是假设股票价格满足下面随机微分式

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \sigma \mathrm{d}B_t + \mu \mathrm{d}t, \tag{7.12}$$

其中 $\sigma > 0$ 称为波动率, $\mu \in \mathbf{R}$ 称为收益率. 随机微分式 (7.14) 是可以解的, 由 Itô 公式,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\log S_t &= \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \frac{1}{2S_t^2}\mathrm{d}\langle S\rangle_t \\ &= \sigma \mathrm{d}B_t + \mu \mathrm{d}t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t \\ &= \sigma \mathrm{d}B_t + (\mu - \sigma^2/2)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此有

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t\right) = S_0 \exp\left(\sigma \widehat{B}_t + (r - \sigma^2/2)t\right).$$

13. Markov 性: Markov 性是指如果你知道股票现在的状态, 那么对将来预测与过去无关. 也就是说, 所有前面说到的利用过去的信息来预测未来的那些方法都是没有理论依据的. 用数学的语言描述 Markov 性

$$\mathbb{E}[a < S_u < b|\mathscr{F}_t] = \mathbb{E}[a < S_u < b|S_t], \tag{7.13}$$

其中 $u > t > 0$, $b > a > 0$. 证明如下, 由于 Brown 运动 (B_t) 有独立增量性, 所以

$$S_u/S_t = \mathrm{e}^{\sigma(B_u - B_t) + (\mu - \sigma^2/2)(u-t)}$$

与 $\mathscr{F}_t$ 独立, 也与 S_t 独立.

14. 等价鞅程度的确定: 由分部积分公式

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}S_t) = \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S_t - r\mathrm{e}^{-rt}S_t\mathrm{d}t,$$

因此折现后的股票价格过程 $(\mathrm{e}^{-rt}S_t)$ 满足随机微分式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-rt}S_t)}{\mathrm{e}^{-rt}S_t} &= \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - r\mathrm{d}t \\ &= \sigma\mathrm{d}B_t + (\mu - r)\mathrm{d}t \\ &= \sigma\left(\mathrm{d}B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

令

$$\widehat{B}_t = B_t - (r-\mu)\sigma^{-1}t.$$

如果我们能够找一个概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 使得 $\widehat{B} = (\widehat{B}_t)$ 在此概率下是鞅, 那么折现后的股票价格在新概率下是鞅. 由测度变换定理, 这只要定义新概率测度

$$\widehat{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}\left[\exp(aB_T - \frac{1}{2}a^2T); A\right],$$

就可以做到了, 其中 $a = (r-\mu)\sigma^{-1}$. 即在概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 下, $\widehat{B}$ 是 Brown 运动.

15. 期权定价公式: 现在

$$\mathrm{e}^{-rt}V_t = \mathrm{e}^{-rT}\widehat{\mathbb{E}}[V_T],$$

如果考虑欧式看涨 $V_T=(S_T-K)^+$, 那么

$$
\begin{aligned}
V_t=V(S,t)&=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\widehat{\mathbb{E}}\left((S_T-K)^+\big|\mathscr{F}_t\right)\\
&=\mathrm{e}^{-r\tau}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(S_0\mathrm{e}^{\sigma B_T+(\mu-\sigma^2/2)T}-K\right)^+\big|\mathscr{F}_t\right]\\
&=\mathrm{e}^{-r\tau}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(S_0\mathrm{e}^{\sigma\widehat{B}_T+(r-\sigma^2/2)T}-K\right)^+\big|\mathscr{F}_t\right]\\
&=\mathrm{e}^{-r\tau}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(S_0\mathrm{e}^{\sigma(\widehat{B}_T-\widehat{B}_t)+\sigma\widehat{B}_t+(r-\sigma^2/2)T}-K\right)^+\big|\mathscr{F}_t\right]\\
&=\mathrm{e}^{-r\tau}\widehat{\mathbb{E}}\left[\left(S_t\mathrm{e}^{\sigma(\widehat{B}_T-\widehat{B}_t)+(r-\sigma^2/2)\tau}-K\right)^+\big|\mathscr{F}_t\right],
\end{aligned}
$$

其中随机变量 $\widehat{B}_T-\widehat{B}_t$ 在概率 $\widehat{\mathbb{P}}$ 下与 $\mathscr{F}_t$ 独立且服从正态分布 $N(0,T)$, 随机变量 S_t 关于 $\mathscr{F}_t$ 可测, 因此期权价格的显式表达式为

$$
V_0=\mathrm{e}^{-r\tau}\int_{\mathbf{R}}\left(S_t\mathrm{e}^{\sigma x\sqrt{\tau}+(r-\sigma^2/2)\tau}-K\right)^+\phi(x)\mathrm{d}x,
$$

其中 $\phi(x)$ 是标准正态分布的密度函数. 写得更明确点, 用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示, 就是 Black-Scholes 公式

$$
V(S,t)=S_t\Phi(d)-K\mathrm{e}^{-r\tau}\Phi(d-\sigma\sqrt{\tau}), \tag{7.14}
$$

其中

$$
d=\frac{\log(S_t/K)+(r+\sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.
$$

第 八 讲　exotic options

1. 欧式和美式期权是标准的期权, 被称为香草型期权. 市场上还存在许多非标准的期权产品. 它们存在的理由多种多样, 可能是因为对冲的需求, 也可能是因为其它比如税, 会计, 法律或者管制的使得它们吸引人.

2. 奇异期权是金融数学领域十分重要的一个部分, 这些期权根据特定的需求而被创造出来, 与标的资产的模型高度相关, 很难准确进行定价, 期权合约背后的风险很难平复, 很容易导致超出预期的损失. 对奇异期权进行分类很难做到, 以下根据衍生产品常见的一些性质来对奇异期权进行大致划分, 并对奇异期权进行总体介绍.

3. 现金流: 是指除了到期时刻的现金流之外, 在合约生效期间是否有其它现金流. 在离散现金流的情况下, 该合约可以看作由若干个期权组合而成. 假设一份合约约定在时刻 t_0 支付持有者现金 q, 则在市场无套利的假设下, 合约价格

$$V(t_0^-) = V(t_0^+) + q$$

这里 q 是关于时间和标的资产的确定函数. 如果 q 是随机变量, 例如 q 的值取决于抛硬币的正反面的值, $q = 1$ 硬币为正面; $q = 0$ 硬币为反面, 那么上述合约价格与现金流的关系不一定成立, 因为现金流的不确定性导致结果与持有者的个人偏好有关. 在连续现金流的情况下, 只要修正一下 Black-Scholes 方程即可

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

这里 q 是红利支付率.

4. 时间依赖性: 是指在合约特征中加入时间依赖的特性. 例如百慕大期权, 只能在给定日期或者给定时间段提前执行期权; 障碍期权, 障碍位置可以随着时间而不同, 每个月都可以设定一个比上个月更高的水平, 这些期权都可以称作是时间上非均匀的.

5. 路径依赖性: 是指期末回报不仅和到期时的标的资产价格有关, 与标的资产价格路径也有关. 强路径依赖: 期权价格在标的资产价格和时间的基础上至少在多一个独立变量的函数, 例如亚式期权, 取决于标的资产在期权生效期间的平均价格, 这类期权定价时需要记录标的资产整个过程的价格, 即增加一维变量; 弱路径依赖: 期权价格与标的资产价格的路径有关, 但是在期权定价的偏微分方程中并不需要比与之类似的欧式期权增加新的独立路径依赖变量, 例如障碍期权, 当标的资产价格在实现确定的时间内触及某个预先确定的障碍水平是, 障碍期权就可能被敲出 (作废) 或是敲入 (生效), 这类期权是路径依赖的, 但是求解的偏微分方程与欧式期权求解的偏微分方程只是在边界条件上有差别, 并不涉及增加一维变量.

6. 维度: 是指期权定价中独立变量的个数. 欧式期权有 t 和 S_t 两个变量, 是两维的. 多维的形式, 一种是期权中有多个标的资产, 例如有一种期权, 期末回报取两种标的资产价格的最大值, 这两种标的资产都是随机的, 每种都有自己的波动率, 它们之间还有相关关系, 在 Black-Scholes 方程中会出现对每种资产价格的二阶偏导, 这就出现了三维问题; 另外一种是之前提到的强式路径依赖合约, 例如亚式期权中的价格平均值, 期权价值是依赖于这个量的, 期权价格方程中需要再增加新的变量, 但这时期权价格对这个新变量的导数只是一阶的, 这个新的变量看起来更像是一个象时间一样的变量, 这与多标的资产的情况是不同的.

7. 阶数: 是指期权期末回报和价值取决于某些期权的价值. 常规期权是一阶的, 期末回报直接取决于标的资产价格, 其他的如路径依赖期权, 如果路径变量直接影响期权价格的话, 也是一阶的. 最典型的二阶期权的例子是复合期权, 比如一个看涨期权给予持有者购买一个看跌期权的权利, 复合期权在时刻 t_1 到期, 而作为其自变量的那个标的期权则在更迟的一个时刻 t_2 到期. 从实际的角度来看, 高阶期权的存在提出了重要的建模问题: 复合期权的期末回报取决于标的期权的市场价值而非理论价值, 对两阶期权都要使用理论模型, 这时高阶期权对模型正确与否就非常敏感, 需要很小心地处理.

8. 行权策略: 是指要考虑最优策略的执行选择. 例如美式期权, 可以提前行权是一个重要特征, 另外可转换债券也有类似特征, 提前行权的关键在于怎么做能获得最大收益, 这其中就蕴含了行权策略的选择问题.

9. 美式期权: 大部分常见的奇异期权的定价问题都可以归结为求解偏微分方程, 美式期权的值函数为

$$V(t,S_t)=\sup_{\tau\in\mathfrak{T}_{t,T}}\mathbb{E}(e^{-r(\tau-t)h(S_\tau)}|\mathscr{F}_t)$$

其中 $\mathfrak{T}_{t,T}$ 是取值于 $[t,T)$ 的随机时刻的集合, $h(\cdot)$ 是给定的函数. 实际上, $(t,x)\mapsto\nu(t,x)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\nu}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2x^2\dfrac{\partial^2\nu}{\partial x^2}+r(x\dfrac{\partial\nu}{\partial x}-\nu)\le 0,\\ \nu\ge h;\nu(T)=h,\\ \left(\dfrac{\partial\nu}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2x^2\dfrac{\partial^2\nu}{\partial x^2}+r(x\dfrac{\partial\nu}{\partial x}-\nu)\right)(h-\nu)=0.\end{cases}$$

10. 亚式期权: 是强路径依赖期权, 需要增加一维变量求解. 它的值函数为

$$V(t,S_t)=\mathbb{E}\left(e^{-r(t-t)}(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt-K)^+|\mathscr{F}_t\right)$$

设

$$\bar{S}_t=\frac{1}{t}\int_0^t S_s ds,$$

则

$$V_t=V(t,S_t,\bar{S}_t),$$

终端条件为

$$\nu(T,x,y)=(y-K)^+.$$

由

$$d(t\bar{S}_t)=S_t dt=\bar{S}_t dt+td\bar{S}_t$$

可得

$$d\bar{S}_t=\frac{S_t-\bar{S}_t}{t}dt$$

由此即可推出

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}+r(s\frac{\partial\nu}{\partial x}-\nu)+\frac{\sigma^2x^2}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial x^2}+\frac{x-y}{t}\frac{\partial\nu}{\partial y}=0$$

11. Basket Option: 标的资产有 d 个, 每个标的资产价格的动态过程为

$$dS_i=\mu_i S_i dt+\sigma_i S_i dW_i$$

其中 $\mathbb{E}[dW_i dW_j]=\rho_{ij}dt$. 利用 Itô 公式可得期权价格的动态过程

$$dV=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i-1}^{d}\sum_{i-1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2V}{\partial S_i\partial S_j}\right)dt+\sum_{i-1}^{d}\frac{\partial V}{\partial S_i}dS_i$$

假设投资组合

$$\Pi = V(S_i, \cdots, S_d, t) - \sum_{i=1}^{d} \Delta_i S_i$$

其中 Δ_i 代表相应标的资产的份数, 则

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{d}\sum_{i-1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j}\right)dt + \sum_{i-1}^{d}\left(\frac{\partial V}{\partial S_i} - \Delta_i\right)dS_i$$

取

$$\Delta_i = \frac{\partial V}{\partial S_i},$$

则可以推得扩展到多个标的资产的 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{d}\sum_{i-1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j} + r\sum_{i-1}^{d}S_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0.$$

如果连续发放红利, 即有连续现金流, 则有

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{d}\sum_{i-1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j} + \sum_{i-1}^{d}(r-q_i)S_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0,$$

其中 q_i 代表红利率.

12. 交换期权, 赋予持有者交换标的资产的权利, 而交换比率 D_1, D_2 预先给定, 期末回报为 $\max(D_1S_1 - D_2S_2, 0)$. 在连续发放红利的情况下, 期权的价格满足偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{d}\sum_{i-1}^{d}\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j\frac{\partial^2 V}{\partial S_i\partial S_j} + \sum_{i-1}^{d}(r-q_i)S_i\frac{\partial V}{\partial S_i} - rV = 0.$$

假定

$$V(S_1, S_2, t) = D_1S_2H(\xi, t),$$

其中, $\xi=\frac{S_1}{S_2}$, 在求解过程中降低了维数. 变量代换后有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S_1} &= \frac{1}{S_2}\frac{\partial}{\partial \xi},\\
\frac{\partial}{\partial S_2} &= -\frac{\xi}{S_2}\frac{\partial}{\partial \xi},\\
\frac{\partial^2}{\partial S_1^2} &= \frac{1}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial S_2^2} &= \frac{\xi^2}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{2\xi}{S_2^2}\frac{\partial}{\partial \xi},\\
\frac{\partial^2}{\partial S_1\partial S_2} &= -\frac{\xi}{S_2^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\frac{1}{S_2^2}\frac{\partial}{\partial \xi},
\end{aligned}
$$

代入上述的偏微分方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma'^2\xi^2\frac{\partial^2 H}{\partial \xi}+(q_2-q_1)\xi\frac{\partial H}{\partial \xi}-q_2H=0,$$

其中 $\sigma'=\sqrt{\sigma_1^2-2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}$.

13. 障碍期权, 应用非常广泛, 一方面可以用来对冲具有类似性质的一些现金流, 另一方面, 如果知道标的资产价格的走势, 那么购买障碍期权比常规期权要来得便宜的多. 在障碍碰到之前, 障碍期权与常规期权满足的偏微分方程一致

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 H}{\partial S}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0,$$

障碍条件则反映在相应的边界条件上. 敲出期权是当标的资产价格达到敲出障碍水平时, 期权合约作废, 因此边界条件为当 $t<T$ 时, $V(H,t)=0$, 其中 H 是向上或向下的障碍水平, 对于一个向上敲出障碍期权来说, 就是在 $0\le S_t<H$ 的条件下解出 Black-Sholes 偏微分方程, 同时考虑资产价格达到 H 时的边界条件 $V(t_H,H)=0$, 最后如果障碍水平没有达到, 如同一个看涨期权, 边界条件就是

$\max(S_T - K, 0)$. 敲入障碍只有在障碍水平被触及的时候才有价值, 因此, 如果没有到达障碍水平, 则期末回报为 0, 对于敲入期权来说, 其价值在于到达障碍的可能性, 如果是一个向上敲入期权, 那么在资产价格到达上限的时候, 期权价值就等于一个相应的常规期权价值, 当障碍被触及时, 得到的是衍生工具本身, 因此一个敲入期权实际上是一个二阶合约, 因此要花解敲出期权两倍的时间, 才能得到敲入期权的价值. 在不考虑贴现的情况下, 具有相同的执行价格、到期时间和障碍水平的敲入期权和敲出期权具有如下的关系: 敲入期权 + 敲出期权 = 执行价格和时间相同的常规期权, 这是因为无论资产价格是否触及障碍水平, 敲入期权和敲出期权的组合总能得到与常规期权相同的回报. 这个关系在障碍期权定价中很有意义, 只需要求出其中一个障碍期权, 即可得到另一个的价值.

第 九 讲　风险管理

1. 对冲: 风险来自随机性, 任何减少随机性或者风险的行动一般都称为对冲或者套期保值. 一个卖出期权的金融机构面临着风险, 当然需要想办法来管理风险, 使风险变得最低. 如果风险资产完全是理想化的二项模型或者几何 Brown 运动, 那么从理论上讲有现成的管理风险的方法. 但是现实是不可能理想的, 所以寻求简单可行的方法是必要的.

2. 平凡的对冲方法: naked 和 covered. 假如结构卖出一份欧式看涨期权, 交易费用由两部分组成:

$$\text{期权价格} + \text{期权交易手续费}.$$

   naked 是指什么都不做, 那么若股票在到期日下跌到敲定价格之下, 那么机构就净赚了交易费; 但是如果股票上涨到敲定价格之上, 客户将执行期权, 机构必须得从市场上买来股票卖给客户, 风险是显而易见的, 股票涨得越高, 风险也就越大. covered 是指在卖掉看涨期权后立刻从市场上买来股票准备着, 那么与 naked 情况相反, 若股票涨过敲定价格, 客户执行期权, 机构把股票卖给客户, 机构是没有损失的, 但若股票下跌, 客户放弃执行, 机构需要以比买入价更低的价格抛掉股票, 这时机构就会承担风险. 所以这两种对冲方法虽然简单, 但都有极大的风险.

3. 止损策略: 还有一种策略是这样设计的, 机构认为它可以盯住股票价格, 当股票价格低于敲定价格 K 时, 它什么都不做, 当股票价格一旦高于 K 时, 立刻买入股票. 如果这个策略可行, 机构是没有风险的. 但是这个策略有两个问题 (1) 股票买卖的交易手续费; (2) 机

构能不能做到精确地盯住这个价格线? 当然第一个问题也许看起来不是问题, 交易手续费一般很低, 但是无论多低, 它在交易频繁时会成为问题, 问题是交易是不是会频繁? 第二个问题是本质的, 如果可以盯住这条价格线并且假设股票是随机游动, 那么 Brown 运动的性质告诉我们, 它在很短的时间内会无穷多次地跨越这条线, 也就是说交易本质上是极其频繁的. 但实际上, 要盯住一个价格线也是不可能的, 总会有一个延迟, 这个延迟大了导致风险, 延迟小了导致交易费用巨大, 也就是说, 其中有不可消除的系统风险.

4. Delta 对冲: 实际上, 在 Black-Scholes 公式的推导中已经告诉我们投资组合的风险有一个内蕴的规避方式, 就是利用期权的 Delta, 期权的 Delta 衡量该期权或者投资组合对于其风险资产价格的敏感程度, 即期权关于资产价格的变化率

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

其中 V 是期权价格. 套期保值是一种很重要的实用技术. 通过调整两种不同风险资产而完全消除风险的做法一般地称为 Delta 对冲.

5. 具体地说, 欧式看涨期权与欧式看跌期权的 Delta 分别是

$$\Delta(\text{看涨}) = \Phi(d),\ \Delta(\text{看跌}) = -\Phi(-d).$$

这两个公式是类似的, 只要证明一个就够了, 证明这个公式是一个很好的求导练习题. 粗略地说, 金融市场上的玩家分为投机者和套期保值者. 投机者是千方百计利用套利来获利, 他们当然不会去做对冲交易, 套期保值者分两种, 一种是投资了股票需要对冲掉其中的部分风险, 另一种是买卖期权需要对冲掉其中的风险. 后一种套期保值者才使用 Delta 套期保值, 对冲风险以获取买卖期权的差价.

另外我们看到 Δ 是价格 S 和时间 t 的函数, 这意味着资产必须连续变化 (不断地买入或者出售股票) 以保持一个合适的 Δ, 称为 Delta 中性, 这一个过程称为动态套期保值. 这要求市场具有高流动性和低交易费.

6. Gamma: 期权或者资产组合的 Gamma 是二阶导数

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2},$$

即 Δ 关于资产价格的变化率. 它给出了一个资产组合为了保持 Delta 中性而必须进行动态套期保值的数量和频繁程度. 当 Gamma 的绝对值很小时, Delta 变化缓慢, 这时为保证 Delta 中性所做的交易不用太频繁, 但是当 Gamma 很大时, Delta 对基础的标的资产价格变得敏感. 欧式看涨与看跌期权的 Gamma 是一样的, 都是

$$\Gamma = \frac{\Phi'(d)}{\sigma S \tau}.$$

7. Vega: 期权或者资产组合的 Vega 是价格关于波动率的一阶导数

$$mathcal V = \frac{\partial V}{\partial \sigma},$$

如果一个期权或交易组合的 Vega 的绝对值很大, 交易组合的价格对波动率的变化非常敏感.

8. Theta: Theta 是期权价格随时间的变化率

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

9. 如果 $\Pi = xS - V$ 是一个 Black-Scholes 假设下的投资组合, 那么类似于 Black-Scholes 方程的推导得

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi.$$

因此有

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi,$$

对于 Delta 中性的投资组合, $\Delta = 0$, 故而

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi,$$

此等式说明 Θ 和 Γ 之间有一定的对应关系: Θ 正而且大时, Γ 必负而且大, 反之亦然.

10. 波动率是期权定价公式中唯一不可直观观测的参数. 波动率的定义: 某个变量的波动率 σ 定义为这一变量在单位时间内连续复利收益率的标准差. 当波动率用于期权定价时, 时间单位通常定义为一年, 因此波动率就是 1 年得连续复利收益率的标准差: 当波动率被用于风险控制时, 时间单位通常是 1 天, 此时的波动率对应于每天的连续复利收益率的标准差. 一般来讲, $\sigma\sqrt{T}$ 等于变量 $\ln(\frac{S_T}{S_0})$ 的标准差, S_T 为市场变量在时间 T 的价格, S_0 是此市场变量的当前价格. 有一种关于波动率的自然假设, 即波动率是由刚刚到达市场的信息所引起. 这些信息促使投资人改变对股票价格的观点, 股票价格变化也促成了波动率的变化, 但是这种有关波动率变化的根源的观点没有得到研究结果的验证, 与之相对的另一结论是波动率在某种程度上是由交易本身造成的.

11. 历史波动率: 根据历史数据估算变量的波动率. 估算时, 观察时间的间隔通常为某一固定时间区间（如 1 天、1 个月）, 定义
$n+1$: 观测次数
S_i: 第 i 个时间段结束时变量的价格, $i = 0, 1, \cdots, n$
τ: 单位时间间隔的长度
$u_i = \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$: 第 i 个区间的回报, $i = 1, 2, \cdots, n$

u_i 的标准差的通常估计式 s 为 $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$, 其中 $\bar{u}$ 为 u 的均值.

u_i 的标准差是 $\sigma\sqrt{\tau}$, 变量 s 是 $\sigma\sqrt{\tau}$ 的估计值, σ 近似为 $\widehat{\sigma}$, 其中 $\widehat{\sigma}=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$. 当 τ 以年计量单位时, 计算出的波动率对应于年变化率, 以天为计量单位时, 计算出的波动率对应于日变化率.

12. 隐含波动率：根据期权市场价格反推计算出的波动率. 在 Black-Scholes 模型中, 假定收益率服从正态分布, 在实践中, 汇率及其它市场变量所服从的分布尾部比正态分布尾部要肥大. 20 世纪 80 年代中期, 一些交易员认识到汇率分布中的“肥尾性态”, 而其他交易员仍然认为对数正态分布合理，对汇率分布有正确认识的交易员采用了买入深度虚值看涨及看跌期权, 并且获得了巨大盈利. 到 80 年代后期, 几乎所有的人都认识到虚值期权所对应的隐含波动率要高.

    隐含波动率可以根据期权市场价格利用数值方法计算而得. 通过分析可知：

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} C^{BS}=(S_t-Ke^{-r(T-t)})^+,$$
$$\lim_{\sigma\uparrow\infty} C^{BS}=S_t.$$

    其中 C^{BS} 是根据 Black-Scholes 模型得到的期权价格.

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial\sigma}=SN'(d_1)\sqrt{T-t},$$
$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial\sigma^2}=\frac{SN'(d_1)\sqrt{T-t}}{\sigma}\left(\frac{\ln^2(\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}})}{\sigma^2(T-t)}-\frac{\sigma^2(T-t)}{4}\right).$$

    其中, $N'(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $d_1=\frac{\ln(\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}})+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$.

    那么, $\sigma\mapsto C^{BS}(\sigma)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{2|\ln(\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}})|}{T-t}})$ 上是凸函数, 在 $(\sqrt{\frac{2|\ln(\frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}})|}{T-t}},\infty)$

上是凹函数, 因此 $C^{BS}(\sigma) = C^{Market}$ 可以用 Newton 法等数值方法求解 σ.

13. 局部波动率: 为了在模型中体现隐含波动率的性质, 同时保持模型的马尔可夫性, 很自然的建模方法是假定波动率时时间和标的资产的函数, 即在风险中性测度下的标的资产价格有如下动态过程:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t)dW_t$$

在局部波动率模型中, 假设期末回报 $h(S_T)$, 则期权价格满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + rS\dfrac{\partial C}{\partial S} + \dfrac{1}{2}\sigma(t,S)^2 S^2 \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC(t,S) = 0, \\ C(T,S) = h(S_T). \end{cases}$$

则

$$\sigma^2(t,S) = \frac{rC - \frac{\partial C}{\partial t} - rS\frac{\partial C}{\partial S}}{\frac{1}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}}$$

注意在时刻 t , S_t 固定, 所以求不出偏导数. Bruno Dupire (1994) 利用不同执行价格和到期时间的期权价格来求解局部波动率 $\sigma(t, S_t)$, 他证明了欧式看涨期权的价格 $C(t, S_t, T, K)$ 满足如下偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T} = \dfrac{1}{2}\sigma(T,K)^2 K^2 \dfrac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK\dfrac{\partial C}{\partial K}, \\ C(t, S_t, t, K) = (S_t - K)^+. \end{cases}$$

利用市场上已有的期权, 通过插值方法, 可以求解局部波动率:

$$\sigma(T,K) = \sqrt{2\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK\frac{\partial C}{\partial K}}{K^2\frac{\partial C}{\partial K^2}}}.$$

当然, 在实际应用中, 不是所有的执行价格和到期日的期权价格都能观察到, 所以不同的插值方法对结果影响很大; 另外, 在二阶偏导

的计算中, 数据偏差可能导致较大的计算误差. 进一步的研究表明局部波动率平面随时间变动, 即: $\sigma(T,K)=\sigma_t(T,K)$, 也就是说在进一步的建模中需要引入随机波动率.

14. 局部波动率和隐含波动率之间的联系: 假定 $C(T,K)=C^{BS}(T,K,I(T,K))$, $I(T,K)$ 是关于 K 和 T 的隐含波动率. 代入 Dupire 公式, 可得

$$\begin{aligned}\sigma^2(T,K) &= 2\frac{\frac{\partial C^{BS}}{\partial T}+\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}\frac{\partial I}{\partial T}+rk(\frac{\partial C^{BS}}{\partial K}+\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}\frac{\partial I}{\partial K})}{K^2(\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K^2}+2\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial K\partial\sigma}\frac{\partial I}{\partial K}+\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma^2}(\frac{\partial I}{\partial K})^2+\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 I}{\partial K^2})}\\ &= \frac{\frac{I}{T}+2\frac{\partial I}{\partial T}+2rK\frac{\partial I}{\partial K}}{K^2(\frac{1}{K^2IT}+2\frac{d_1}{KI\sqrt{T}}\frac{\partial I}{\partial K}+\frac{d_1d_2}{I}(\frac{\partial I}{\partial K})^2+(\frac{\partial^2 I}{\partial K^2}))}\end{aligned}$$

其中 $d_{1,2}=\frac{\ln\frac{S}{Ke^{-rT}}\pm\frac{1}{2}I^2T}{I\sqrt{T}}$. 如果 $\frac{\partial I}{\partial K}=0$, 则 $\sigma^2(T)=I^2(T)+2I(T)T\frac{\partial I}{\partial T}$, 即

$$I^2(T)=\frac{\int_0^T\sigma^2(s)ds}{T}.$$

第十讲　利率

1. 利率是指单位时间内所支付的利息量与所借入的货币本金的比率，利率的高低与市场上的货币供求有关. 与利率相关的金融产品有很多，例如零息债券、附息债券、浮动利率债券等常见的债券产品，还有远期利率协议等利率合约. 讨论利率与时间期限的关系问题称为利率的期限结构. 利率与期限的关系通过收益曲线来描述，例如国债收益曲线，即 3 个月、6 个月、1 年直至 30 年的国债利率值，它们经常作为各种金融产品定价的基准.

2. 零息债券: 把将来 1 美元的承诺作为资产，用 $Z(t,T)$ 表示该债券在时刻 t 的价格，则到期价值为 $Z(T,T)=1$，$Z(0,T)$ 为该债券的当前价格.

3. 收益: 能较好地描述市场的是债券所隐含的平均利率，如果利率为常数 r，则零息债券价格 $Z(t,T)=e^{-r(T-t)}$，或者说

$$r=-\frac{\ln Z(t,T)}{T-t}.$$

若是附息债券则有

$$P(t,T)=\sum_{i=1}^{N}C_ie^{-r(t_i-t)}+Pe^{-r(T-t)}$$

这里假设 $[t,T]$ 能被时间间隔整除，C_i 为时刻 t_i 支付的利息，P 为本金. 若利率不是常数时，则定义平均收益 $R(t,T)$ 为

$$R(t,T)=-\frac{\ln Z(t,T)}{T-t}.$$

4. 瞬时利率: 定义为

$$r_t = \lim_{\Delta t \to 0} R(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[-\frac{\ln Z(t, t+\Delta t)}{\Delta t} \right].$$

显然

$$\begin{aligned} r_t &= R(t,t) \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[-\frac{\ln Z(t, t+\Delta t) - \ln Z(t,t)}{\Delta t} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}(\ln Z(t,T))|_{T=t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}(\ln Z(t,t)). \end{aligned}$$

5. 远期利率: 指站在今天的角度观测 t 时刻的瞬时利率, 一般用 $f(0,t)$ 表示. 远期利率与零息债券关系如下

$$Z(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds},$$

或

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln Z(t,T)}{\partial T}.$$

因为平均收益

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds,$$

则

$$f(t,T) = R(t,T) + (T-t)\frac{\partial R(t,T)}{\partial T}.$$

所以, 对债券价格、远期利率和收益三者中的任意一个过程建立模型, 即可得到另外两者的模型.

6. 久期: 麦考利久期定义为

$$-\frac{1}{P(t,T)}\frac{\partial P(t,T)}{\partial r} = \frac{1}{P(t,T)}\left((T-t)Pe^{-r(T-t)} + \sum_{i=1}^{N} C_i(t_i - t)e^{-r(t_i - t)} \right),$$

久期可以理解为现金流占现值的比重乘以现金流发生的时间, 是一个加权平均时间的概念. 假设 $P(t,T)=Xe^{-r(\bar{T}-t)}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(t,T)}{\partial r}&=-(T-t)Pe^{-r(T-t)}-\sum_{i=1}^{N}C_i(t_i-t)e^{-r(t_i-t)}\\&=-X(\bar{T}-t)e^{-r(\bar{T}-t)}.\end{aligned}$$

故有

$$-\frac{1}{P(t,T)}\frac{\partial P(t,T)}{\partial r}=\bar{T}-t.$$

久期可以用于比较久期接近的不同产品的收益率, 但要注意久期的局限性, 例如 30 年期的债券和 10 年期的零息债券久期可能相等, 但明显 30 年期的债券风险更大.

7. 利率互换, 是互换常见的一个产品. 互换和期权一样, 是一种重要的金融衍生工具, 它保值、投机和套利的基本功能. 互换兴起于 20 世纪中后期, 第一份互换合约出现在 20 世纪 80 年代初, 自那以后, 互换市场有了飞速的发展, 现在已成为国际金融市场的一个重要组成部分, 常见的互换有货币互换、利率互换、货币利率互换、基准利率互换、资产互换、商品互换及股权互换等. 最常见的互换是利率互换, 利率互换是交易双方按事先商定的规则, 以同一货币、相同金额的名义本金作为计算的基础, 在相同的期限内, 交换固定利率利息和浮动利率利息的支付的交易. 利率互换的主要作用是能降低并锁定融资成本, 并能改变债务或资产的性质或种类. 在金融领域, 由于借款人之间存在着资信等级差异及金融市场之间存在着相互分割的缺陷, 使得不同的借款人之间的融资成本各不相同. 从而为利率互换提供了可能. 例如, 甲公司信用等级高, 筹措国定利率资金的成本为 7%, 借入浮动利率资金的成本为 LIBOR + 0.3%; 乙公司信用等级低, 筹措国定利率资金的成本为 8.2%, 借入浮动利率

资金的成本为 LIBOR + 1%. 可见不管筹措固定利率资金还是浮动利率资金, 甲公司都有绝对优势, 但是乙公司在借入浮动利率资金有相对优势. 现假定甲公司需要浮动利率资金, 而乙公司需要固定利率资金, 在这种情况下, 双方可发挥各自在债券市场和银行信贷市场上的相对优势, 并通过利率互换交易来将这种优势转化为实际利益. 双方可达成如下互换协议: 甲公司按 7% 的固定利率筹措资金, 乙公司按 LIBOR + 1% 的浮动利率筹措资金, 然后进行利率互换, 互换交易的条件是: 乙公司以 7.95% 的固定利率债务与甲公司以 LIBOR + 0.05% 的浮动利率债务相交换, 双方可各节约利息成本 0.25%.

8. 利率互换与债券之间的关系, 可以通过零息债券确定利率互换中固定利率方的值, 也可称作互换利率的价格. 假设利率互换的总时间期限为 $[t, T]$, 互换在时刻 T_i 进行, 其中, $t = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = T$, $\tau_i = T_{i+1} - T_i$, 区间 $[T_i, T_{i+1}]$ 上的本金为 B_i, 固定利率为 r_s, 则固定利率支付方支付总额为 $r_s \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i B_i Z(t, T_{i+1})$, 对于他来说, 收到的浮动利率的利息为 $\sum_{i=0}^{N-1} B_i(Z(t, T_k) - Z(t, T_{k+1}))$, 根据无套利原理, 在达成协议时, 有

$$r_s = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} B_i(Z(t, T_k) - Z(t, T_{k+1}))}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i B_i Z(t, T_{i+1})}.$$

利率交换的交易非常广泛, 因此可以看作是一种标的资产, 而且通过利率互换, 可以确定收益率曲线, 这个过程中没有涉及到利率模型的应用, 事实上, 如果现金流之间能够完全对冲的话可以避免使用模型, 因为模型的微小偏差可能导致巨大的无谓损失.

9. 利率模型, 对于短期来说, 利率可以是确定的, 比如常数或者是确定的关于时间的函数, 但对于长期来说, 需要构建模型, 这里主要介绍

单因素利率模型, 建模的对象是瞬时利率, 在实际中可以去到期日为一个月的债券. 假设瞬时利率满足动态过程

$$dr = u(r,t)dt + \omega(r,t)dW,$$

其中 u, ω 是关于 r, t 的函数, W 是给定测度空间的一维布朗运动. 由于利率不能买卖, 不能用来复制资产, 可以购买不同到期日的同种债券构造资产组合来对冲风险, 假设零息债券价格 $V_1(r,t;T_1)$ 和 $V_2(r,t;T_2)$ 只受 r, t, T 的影响, 构造资产组合 $\Pi = V_1 - \Delta V_2$, 由 Itô 公式可得

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{\partial V_2}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt\right).$$

取

$$\Delta = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}},$$

在自融资和无套利原理的假设下,

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}}\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt\right)\right)dt \\ &= r\Pi dt \\ &= r\left(V_1 - \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}}V_2\right)dt, \end{aligned}$$

整理可得

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2}{\frac{\partial V_2}{\partial r}},$$

上式左边是关于 T_1 的函数, 右边是关于 T_2 的函数, 抽象出来可得

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} = a(r,t),$$

其中 $a(r,t)$ 表示一类额外的市场风险, 它可以用风险价格 $\lambda(r,t)$ 来描述:

$$a(r,t)=\omega\lambda(r,t)-u(r,t),$$

则可得到到期日为 T 的债券的定价方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(u-\lambda\omega)\frac{\partial V}{\partial r}-rV=0,$$

给出到期边界条件和确定的 u,ω,λ, 就可以得到上述方程的解析解或数值解. 建模的难点是确定 ω 和 $u-\lambda\omega$ 的函数形式.

10. $\lambda(r,t)$ 的含义: 因为

$$dV(r,t,T)=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+u\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)dt+\omega\frac{\partial V}{\partial r}dW,$$

而

$$\frac{\partial V}{\partial t}dt+u\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\lambda\omega\frac{\partial V}{\partial r}+rV,$$

所以

$$dV(r,t,T)=\left(\lambda\omega\frac{\partial V}{\partial r}+rP\right)dt+\omega\frac{\partial V}{\partial r}dW,$$

或

$$dV(r,t,T)-rPdt=\omega\frac{\partial V}{\partial r}(\lambda dt+dW).$$

上式说明零息债券并非是无风险债券, 因为无风险债券右端应该是零, 右端可以解释为承担风险的超额收益, 而函数 $\lambda(r,t)$ 通常称为风险的市场价格.

11. Vasicek 模型被称为" 均值反转" 模型, 当利率较高时, 经济反战会放慢, 借款人对资金的需求就会减少, 结果会导致利率下降. 当利率

较低时, 借款人对资金的需求会增加, 结果导致利率上升. 该模型假设瞬时利率 $r(t)$ 满足随机微分方程

$$dr_t = \alpha(m - r_t)dt + \sigma dW_t$$

其中, m 为均值, α 可以看作回拉力度, 两者均需要通过估计成为给定常数, W_t 为风险中性测度下的布朗运动. 解该随机微分方程可得

$$r_t = m + (r_0 - m)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u,$$

可得

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}[r_t] = m + (r_0 - m)e^{-\alpha t},$$

及

$$\begin{aligned} Cov^{\mathbb{P}_0}[r_t, r_s] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u \int_0^s e^{-\alpha(s-u)} dW_u\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}\right). \end{aligned}$$

若 $t \to \infty$, r_t 服从 $N(m, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$. 由零息债券与瞬时利率的关系可得

$$Z(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0}\left[e^{-\int_0^T r_t dt}\right],$$

而

$$\int_0^T r_t dt = mT + (r_0 - m)\Lambda(T) + \sigma \int_0^T \Lambda(T-t) dW_t,$$

其中 $\Lambda(u) = \frac{1-e^{-\alpha u}}{\alpha}$. 所以可以推得

$$Z(0,T) = e^{\left[-(mT + (r_0 - m)\Lambda(T)) + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^T \Lambda(u)^2 du\right]},$$

以及

$$Z(t,T) = e^{\left[-(m(T-t) + (r_t - m)\Lambda(T-t)) + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T \Lambda(u)^2 du\right]},$$

零息债券的价格满足动态过程

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = r_t dt - \sigma\Lambda(T-t)dW_t.$$

平均收益的函数形式为

$$\begin{aligned} R(t,T) &= \frac{-\ln Z(t,T)}{T-t} \\ &= m + (r_t - m)\frac{\Lambda(T-t)}{T-t} - \frac{\sigma^2}{2(T-t)}\int_t^T \Lambda(u)^2 du. \end{aligned}$$

12. Heath-Jarrow-Morton (HJM) 模型通过确定债券的模型再来计算利率, 可以克服对瞬时利率建模的缺点, 因为瞬时利率不可观测, 必须计算得到平均收益率或者债券价格, 通过不断调整参数才能使得平均收益或者债券价格与市场观测值一致, 这一过程会加剧模型可能产生的误差. HJM 模型假设零息债券价格满足动态过程

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = r_t dt + \sigma(t,T)dW_t,$$

利用 Itô 公式可得

$$d(\ln Z(t,T)) = \left(r(t) - \frac{\sigma^2(t,T)}{2}\right)dt + \sigma(t,T)dW_t,$$

两边积分得

$$\ln Z(t,T) - \ln Z(0,T) = \int_0^t r(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s,T)ds + \int_0^T \sigma(s,T)dW_s.$$

在上式中取 $T=t$, 注意到 $Z(t,t)=1$, 得

$$\int_0^t r(s)ds = -\ln Z(0,t) + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s,T)ds - \int_0^T \sigma(s,T)dW_s,$$

所以可以推得

$$Z(t,T) = \frac{Z(0,T)}{Z(0,t)} e^{\left(-\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma^2(s,T)-\sigma^2(s,t))ds + \int_0^T(\sigma(s,T)-\sigma(s,t))dW_s\right)}.$$

平均收益满足

$$\begin{aligned}R(t,T) &= \frac{-\ln Z(t,T)}{T-t} \\ &= -\frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{Z(0,T)}{Z(0,t)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(\sigma^2(s,T)-\sigma^2(s,t))}{T-t}ds - \int_0^T \frac{(\sigma(s,T)-\sigma(s,t))}{T-t}dW_s.\end{aligned}$$

根据远期利率与零息债券的关系

$$\begin{aligned}d(f(t,T)) &= -d\left(\frac{\partial \ln Z(t,T)}{\partial T}\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}d(\ln Z(t,T)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}\left(\left(r(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t,T)\right)dt + \sigma(t,T)dW_t\right) \\ &= \sigma(t,T)\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}dt - \frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}dW_t,\end{aligned}$$

注意到 $\sigma(t,t)=0$,

$$\sigma(t,T)\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T} = \frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}\int_t^T \frac{\partial\sigma(t,s)}{\partial s}ds,$$

即在这个关于远期利率的模型中, 波动率决定漂移率, 这被称为 HJM 之谜.

第 十一 讲　风险度量: VaR

1. 由于随机性, 市场上的风险到处存在, 一个投资组合的风险怎么衡量是一个非常重要而困难的问题, 方差或者说波动率通常被当做风险的一种度量, 但波动率大小实际上只告诉我们投资组合价值的稳定程度. 金融机构需要更简单直接的一种风险度量.

2. VaR=Value at Risk: 该投资组合 (或者一个金融机构的资产) 以百分之 X 的概率保证在接下来的 N 天内的资产的亏损不会高于一个数值 R. 这个 R 值就是这个投资组合的 VaR, 用 V_N 表示资产组合在 N 天期间的变化, 它是一个随机变量,

$$\mathbb{P}(V_N \le R) \le 1 - X\%,$$

当然 X 和 N 是其中的两个参数. 在 1996 年 Basel 委员会规定每个银行必须计算并公布在 $X = 99$ 和 $N = 10$ 时的 VaR 以让公众知道银行的风险. 所以 VaR 问题实际上是一个分位点问题. 通俗地说, VaR 回答这样一个问题: '事情最坏会到什么程度?'

3. VaR 有两个参数: 时间 N 和置信度 $X\%$. VaR 常常被监管机构用来确定资本金的数量, 对于市场风险, 监管机构往往要求资本金等于在未来 10 天 99% VaR 值的若干倍数; 对于信用风险和操作风险, 监管机构往往要求在资本金计算中, 采用 1 年的持有期和 99.9% 的置信度. 但在实践中, 我们通常取 $N = 1$, 然后

$$N\text{天的 VaR} = 1\text{ 天的 VaR} \times \sqrt{N}.$$

这当然是近似的, 但是当假设 1 天资产价值变化是均值零的正态随机变量, 每天的价值变化是独立同分布时, 这个等式的确成立, 很容易证明.

4. 对于多个资产来说,
$$VaR = -N^{-1}(1-X\%)\sqrt{T\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\Delta_i\Delta_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}S_iS_j}$$
这里假设 M 种资产, 数量为 Δ_i, 它们的波动率分别为 σ_i, 两种资产之间的相关系数为 ρ_{ij}.

5. 统计计算: 用历史数据来模拟计算是常用的方法. 比如说我们有前 500 天的数据, 记录了每天闭市时投资组合的市值. 用第 n 天的数据减去前一天的数据得到第 n 个变化数据, 这样我们得到 499 个变化数据, 把它们从小到大排起来, 第 5 个数据就是 99% 的 VaR. 通常我们要抹去时间因素比如利率的影响, 比如设第 i 的市值是 v_i, 那么把每天的变化率都看齐到最后一天, 令第 i 天的修正值为
$$v_i' = v_{500}\cdot\frac{v_i}{v_{i-1}}.$$

6. VaR 的估计, 在已知随机变量分布的情况下, 可以直接估计 VaR 的值. 例如假设 $X_1,\cdots,X_n$ 互相独立, 且都服从指数分布, 密度函数为
$$f(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0, \quad 0 \quad x<0.\end{cases}$$
由 $\mathbb{P}(X_1 \le R) = 1 - X\%$ 可得
$$\int_0^R \lambda e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda R} = 1 - X\%,$$
即
$$R = -\frac{\ln(X\%)}{\lambda}$$
根据大数定律, 在一定的置信度下, 当 $n\to\infty$, 有
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \to \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda},$$

所以 VaR 的估计值

$$\widehat{R} = -\ln(X\%)\bar{X}_n.$$

在未知分布和参数的情况下, 首先需要估计经验分布即相应的参数, 然后再进行上述过程估计 VaR 的值. 假设对 $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k \le x}$, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$F_n(x) \to \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_1 \le x}] = F(x).$$

7. 波动率与 VaR: 虽然方差不同于 VaR, 但两者还是密切相关的, 设 V 是期望零标准差为 σ 的正态随机变量, 那么 $\frac{V}{\sigma}$ 服从标准正态分布, 所以

$$\mathbb{P}(V/\sigma < u_\alpha) = \alpha,$$

其中 u_α 是标准正态分布的 α- 分位点. 因此 VaR 等于

$$\sigma \cdot u_{1-X\%}.$$

波动率是资产收益率的标准差, 如果资产从 V_0 变为 V_1, 那么波动率为

$$\sigma = \left[\mathbb{E}\left(\frac{V_1 - V_0}{V_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

则资产变化的标准差约等于 $\sigma \cdot V_0$. n 天的波动率 σ_n 和一天的波动率 σ_1 有以下关系

$$\sigma_n = \sigma_1 \cdot \sqrt{n}.$$

例如如果 Microsoft 股票一年的波动率是 32%, 那么一天的波动率是 $32\%/\sqrt{252} = 2\%$, 其中每年按 252 个工作日结算. 假如某机构持有 1000 万美元的 Microsoft 股票, 则此投资的日变化标准差是

$$2\% \times \$10,000,000 = \$200,000.$$

这样这个投资的一天期的 VaR 就可以计算了, 它等于

$$200,000 \times u_{0.01} = 200,000 \times (-2.33) = -466,000.$$

8. 自相关性的影响, 资产价格每天的变化并非完全独立, 假设第 i 天的价格变化为 δS_i, 假设 δS_i 与 δS_{i-1} 的相关系数为 ρ, 对于任意 i, δS_i 的方差为 σ^2, 则 $\delta S_i + \delta S_{i-1}$ 的标准差为 $\sqrt{\sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2}$, 则 T 天内的价格变化的标准差为

$$\sigma\sqrt{T + 2(T-1)\rho + \cdots + 2\rho^{T-1}},$$

如果存在自相关性, 则 $VaR_T = VaR_1\sqrt{T}$ 低估实际的 VaR 的值.

9. 风险测度的一致性条件由 Artzner et al. (1997) 提出:
次可加性: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$, 由两种资产构成的投资组合的风险测度值应小于等于两种资产各自风险测度值之和. 这个条件与" 不要把鸡蛋放在同一个篮子里" 的经典风险管理思想一致, 即分散化投资的风险一定要小于等于集中化投资的风险.
单调性: 若 $X \leq Y$, 则 $\rho(X) \geq \rho(Y)$, 如果在任何条件下, X 组合的收益均低于 Y 组合的收益, 那么 X 组合的风险测度值一定要大于 Y 组合的风险测度值, 如果一个组合的回报总是比另一个组合差, 则第一个组合的风险要高, 其所需要的资本金数量更大.
平移不变性: $\forall$ 常数 c, $\rho(X+c) = \rho(X-c)$, 如果在交易组合中加入 c 数量的现金, 则风险测度值必须减少 c, 因为该部分现金可以为损失提供对冲, 相应的准备金要求也减少.
同质性: $\lambda > 0$, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$, 如果一个资产组合所包含的资产品种和相对比例不变, 但资产数量增至原来数量的 λ 倍, 则新组合的风险测度值应该是原组合风险测度值的 λ 倍.

10. VaR 不满足第一个条件, 其余三个均满足. 例如, 假定两个独立贷款项目在 1 年内均有 0.02 的概率损失 1000 万, 有 0.98 的概率损失 100 万, 任意一个单笔贷款在持有期为 1 年, 97.5% 的置信水平下的 VaR 为 100 万, 则单笔 VaR 的和为 200 万; 将两个贷款组合, 有 $0.02 \times 0.02 = 0.0004$ 的概率损失 2000 万, $2 \times 0.02 \times 0.98 = 0.0392$ 的概率损失 1100 万, $0.09 \times 0.98 = 0.9604$ 的概率损失 200 万, 那么持有期 1 年, 97.5% 的置信水平下, 组合的 VaR 为 1100 万, 比单笔之和的 200 万高出 900 万, 违背了第一个条件.

11. C-VaR= Conditional VaR : 虽然 VaR 告诉我们事情最坏会到什么程度, 但 C-VaR 会告诉我们如果不好的事情发生了, 那么亏损会到什么程度. 这从数学上是指那个不好的 $(100 - X)\%$ 概率到底集中在什么地方? 是集中在靠近 VaR 的地方还是分布在远离 VaR 的地方. 或称作预期亏损, 衡量的是当市场条件变糟而触发损失时, 损失的期望值为多大. C-VaR 满足一致性条件. 接上例, 计算 C-VaR, 在 2.5% 的尾部分布中, 2% 的概率损失 1000 万, 0.5% 的概率损失 100 万, C-VaR 为 $0.8 \times 1000 + 0.2 \times 100 = 820$ 万, 两个贷款组合后, 在 2.5% 的尾部分布中, 0.04% 的概率损失 2000 万, 2.46% 的概率损失 1100 万, C-VaR 为 $\frac{0.04}{2.5} \times 2000 + \frac{2.46}{2.5} \times 1100 = 1114.4$ 万. 小于单笔 C-VaR 之和的 1640 万.

12. 后验分析: 将 VaR 与实际损失进行对照的过程. 直观检验方式, 如果计算了持有期为 1 天, 置信度为 99% 的 VaR, 则可以找出组合每天的损失中有多少次超过了这一 VaR 值. 如果超过的天数占整体天数的 1% 左右, 则说明 VaR 计算模型比较良好, 对于 1 年 250 天的假设下, 一般认为 4 次以下表现良好. 如果超过的天数比例较大, 说明 VaR 值偏低, 而这将倒是资本金数量偏低, 一般认为 12 次

以上是需要格外关注的, 如有需要应调整 VaR 的值. 一般地, 如果 VaR 的持有期为 1 天, 置信度为 $X\%$, 如果 VaR 模型正确, 则超出 VaR 的概率为 $1-X\%$, 假定有 n 个观察日, 其中 m 天损失超出 VaR , 若 $\frac{m}{n}>1-X\%$, 说明 VaR 估计偏低.

13. 正式的统计检验:
    H_0: 对于任意一天, 超出 VaR 的概率为 p;
    H_1: 对于任意一天, 超出 VaR 的概率大于 p.
    损失超过 VaR 的天数大于等于 m 的概率为
    $$\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$
    假设该检验所选定的检验水平为 5%, 则上式计算的值大于 5% 时, 接受 H_0, 上式小于 5% 时, 拒绝 H_0, 从而拒绝 VaR 计算模型.

14. Kupiec 提出双尾检验:
    考察统计量
    $$-2\ln[(1-p)^{n-m}p^m]+2\ln[(1-\frac{m}{n})^{n-m}(\frac{m}{n})^m],$$
    当基于实际数据的上式的值大于给定置信度的 $\chi^2(1)$ 分布的理论值时, 可以拒绝该 VaR 模型.

15. 独立性检验: 当投资组合每天的价格变化独立, 那么超出 VaR 情形的发生应该比较均匀地分布在样本区间内, 现实中, 超出 VaR 的发生往往聚集在一起, Chistofferson 提出了检验 VaR 独立性的方法.
    状态 0 : 某一天没有超出 VaR 的情形发生;
    状态 1 : 某一天有超出 VaR 的情形发生.
    u_{ij} 为某天处于状态 i 且在第二天处于状态 j 的次数. 定义统计量
    $$-2\ln[(1-\Pi)^{u_{00}+u_{10}}\Pi^{u_{01}+u_{11}}]+2\ln[(1-\Pi_{01})^{u_{00}}\Pi_{01}^{u_{01}}(1-\Pi_{11})^{u_{10}}\Pi_{11}^{u_{11}}],$$

其中

$$\Pi = \frac{u_{01} + u_{11}}{u_{00} + u_{01} + u_{10} + u_{11}},$$
$$\Pi_{01} = \frac{u_{01}}{u_{00} + u_{01}},$$
$$\Pi_{11} = \frac{u_{11}}{u_{10} + u_{11}}.$$

当组合价格每天的变化都独立时, 上述统计量服从 $\chi^2(1)$ 分布, 当基于实际数据的上式的值大于给定检验水平的 $\chi^2(1)$ 分布的理论值时, 可以拒绝价格变化独立的原假设.

结束语

Black-Scholes 公式及近 30 年发展起来的金融定价理论是随机分析最漂亮的应用, 类似于鞅, 随机积分, Itô 公式, 鞅表示定理, 等价鞅测度等这些诞生于上个世纪上半叶的极其抽象的数学概念和定理竟然在这个领域变得非常直观, 可以说如鱼得水, 恰如 Riemann 的微分几何碰到 Einstein 的广义相对论, 这种情形对于抽象数学来说是极其难得的. 正是因为这个工作, 伊藤清和他的伊藤公式名扬金融界, 也因为这个工作, Merton 和 Scholes (获奖时 Black 已经去世) 获得了 Nobel 经济学奖. 但这不完全都是好事, 金融界是这个世界的浓缩, 那里人性的贪婪更被成倍地放大, 数次金融危机的发生都与期权等金融杠杆脱不了干系, 这些所谓创新的金融产品被金融界的无良的精英们用来忽悠普通民众, 他们所谓的理财总是有意无意地把民众的财富理到自己的口袋里, 所以我不知道随机分析在这样的领域有如此漂亮的应用是幸焉还是不幸, 这种心情正如科学家看到原子弹的诞生一样.

参考文献

[1] J. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, 清华大学出版社, 2008

[2] Paul Wilmott, Paul Wilmott Introduces Quantative Finance, John Wiley & Son, 2001

[3] M. Capinski, T. Zastawniak, 金融数学, 中国人民大学出版社, 2009

(有中文版)

[4] F. Delbaen, W. Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage, Srpinger & 世界图书出版公司, 2006

[5] 史树中, 金融学中的数学, 高等教育出版社, 2006

[6] 史树中, 金融经济学十讲, 上海人民出版社, 2004

[7] 应坚刚, 随机分析八讲, 自编讲义

[8] 应坚刚, 何萍, 概率论, 复旦大学出版社, 上海, 2005

[9] 应坚刚, 金蒙伟, 随机过程基础, 复旦大学出版社, 上海, 2005