其中, 可加性假设蕴含着或者对任何 $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) < +\infty$ 或者对任何 $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) > -\infty$. 称符号测度是有限的, 如果对任何 $A \in \mathscr{F}$, $|\mu(A)| < +\infty$. 说可测集 A 是正集 (负集), 如果其任何可测子集测度非负 (非正). 显然正集的可列并还是正集. 下面是 Hahn 分解, 非常直观.

定理 1.1.10 (Hahn) 存在 $H \in \mathscr{F}$ 使得 H 是正集, 而 H^c 是负集. 集 H 称为是 μ 的 Hahn 集, 它不唯一, 可以相差一个零测集.

证明. 不妨设 μ 取不到 $+\infty$. 对任何 $A \in \mathscr{F}$, 定义

$$\mu^-(A) := \inf\{\mu(B) : B \in \mathscr{F}, B \subset A\}.$$

显然 $\mu^-(A) \leqslant 0$ 且 A 是正集当且仅当 $\mu^-(A) = 0$. 另外如果 B 是 A 的测度为负的可测子集, 那么 $\mu^-(A \setminus B) \geqslant \mu^-(A)$.

准备工作完成, 下面我们先证明任何正测度集有子集是正集, 或者说如果 $B \in \mathscr{F}$ 使得 $\mu(B) > k > 0$, 那么存在正的子集 $A \in \mathscr{F}$ 且 $\mu(A) > k$. 事实上, 如果 B 就是正集, 记其为 A. 如果不是, 那么 $\mu^-(B) < 0$, 故存在 $E_1 \subset B$ 使得 $\mu(E_1) < \mu^-(B)/2 \vee (-1)$. 显然 $\mu(B \setminus E_1) > k$. 如果 $B \setminus E_1$ 是正集, 记其为 A; 如果不是, 那么对任何 $\mu^-(B \setminus E_1) < 0$, 故存在 $E_2 \subset B \setminus E_1$ 使得

$$\mu(E_2) < \frac{1}{2}\mu^-(B \setminus E_1) \vee (-1).$$

这样继续, 或者在有限步得到正集 A, 这时显然 $\mu(A) > k$, 或者得到 B 的不相交可测子集列 $\{E_n\}$ 使得

$$\mu(E_n) < \frac{1}{2}\mu^-\left(B \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)\right) \vee (-1), \quad n \geqslant 1.$$

这时令 $E := \bigcup_n E_n$, $A := B \setminus E$. 则 $\mu(E) \leqslant 0$, 故 $\mu(A) \geqslant \mu(B) > k$. 为了验证 $\mu^-(A) = 0$, 注意到因为 μ 取不到$+\infty$, 所以 $\mu(E) > -\infty$, 这蕴含着 $\lim \mu(E_n) = 0$, 由上面 E_n 的取法可以看到 $\mu^-\left(B \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)\right)$ 的极限应该不小于零. 因此

$$\mu^-(A) \geqslant \lim_n \mu^-\left(B \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)\right) \geqslant 0,$$

这意味着 $\mu^-(A) = 0$, 即 A 是正集.

现在令

$$b := \sup\{\mu(A) : A \in \mathscr{F}\}.$$

现在我们验证上确界可在 $\mathscr{F}$ 中达到. 不妨设 $b > 0$. 前面实际上已经证明对任何 $0 < k < b$, 存在正集 $A \in \mathscr{F}$ 使得 $\mu(A) > k$. 因此, 可取得正集列 $\{A_n\}$, 使得 $\lim_n \mu(A_n) = b$, 令 $H := \bigcup_n A_n$, 则 H 是一个 Hahn 集. 事实上, H 显然是正集, 且 $\mu(H) \geqslant b$, 故 $\mu(H) = b$. 因此 $b < +\infty$, 另外对 H^c 的任何可测子集 A, $b \geqslant \mu(H \cup A) = b + \mu(A)$, 推出 $\mu(A) \leqslant 0$. 这证明了 H^c 是负集. □

由此, 我们得到 Jordan 分解.

定理 1.1.11 (Jordan) 设 H 是 Hahn 集, 则

(1) $\mu^+(A) = \mu(A \cap H)$, $\mu^-(A) = -\mu(A \cap H^c)$, $A \in \mathscr{F}$, 因此 μ^+, μ^- 是测度, 且其中至少有一个是有限的;

(2) $\mu = \mu^+ - \mu^-$ 且如果存在测度 μ_1, μ_2 使得 $\mu = \mu_1 - \mu_2$, 则 $\mu^+ \leqslant \mu_1$, $\mu^- \leqslant \mu_2$.

记 $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$, 它称为是 μ 的全变差测度. $|\mu|(\Omega)$ 是 μ 的全变差. 这等价于实变函数中所说的一个有界变差函数总是可以分解为两个递增函数的差. Jordan 分解定理告诉我们符号测度可以写成为两个测度的差, 所以很多对测度成立的结论也对符号测度成立.

下面我们讨论测度的绝对连续性和 Radon-Nikodym 导数. 设 μ 是可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上测度, f 是非负可测函数, 定义集函数 ν 如下

$$\nu(A) := \mu(f \cdot 1_A) = \int_A f(x)\mu(\mathrm{d}x),\ A \in \mathscr{F},$$

容易验证 ν 也是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上测度, 简单地把 ν 记为 $f \cdot \mu$. 对 $A \in \mathscr{F}$, 测度 $1_A \cdot \mu$ 实际上是 μ 在 A 上的限制. 任给两个测度 μ, ν, 如果存在一个可测函数 f 使得 $\nu = f \cdot \mu$, 那么我们说 ν 关于 μ 是 Radon-Nikodym 可导的, 并称 f 是 ν 关于 μ 的 Radon-Nikodym 导数, 常写为 $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ 或者 $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$. 再介绍绝对连续的概念, 称 ν 关于 μ 绝对连续, 如果对任何 $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) = 0$ 蕴含着 $\nu(A) = 0$. 记为 $\nu \ll \mu$. 显然如果 ν 关于 μ 是 Radon-Nikodym 可导的, 则 $\nu \ll \mu$, 但一般地反之不对, 如奇异测度与计数测度. 但若 μ 是 σ- 有限时, 逆命题成立.

定理 1.1.12 (Radon-Nikodym) 设 μ, ν 是可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上两个 σ- 有限的测度. 如果 $\nu \ll \mu$, 则 ν 关于 μ 可导, 其 Radon-Nikodym 导数 μ- 几乎处处有限且在 μ- 几乎处处相等的意义下是唯一的.