

# 随机过程讲义

Lectures on Stochastic Processes

应坚刚

复旦大学数学系

2025 年 5 月 16 日

# 序 言

每次同事碰到我问我上什么课我说随机过程时,他们总会说随机过程随机过.这当然是个玩笑,我不知道这笑话是怎么来的,也不知道是什么意思,也许笑话本身是指课程太难不好过,但听起来不是那么愉快,似乎是说教师没那么认真教或者学生没学到什么东西.

这个简短的讲义是为复旦大学数学专业本科学生开设的随机过程选修课而写的,对象是学过概率论且对概率与随机过程的研究有兴趣的学生.讲义的内容包括课程所需的预备知识,经典随机过程的基本概念及其经典结果,具体地说,离散时间的随机游动,鞅,马氏链,以及连续时间的布朗运动与泊松过程,它们的样本轨道的一些有趣的概率性质.在选取内容时尽量做到以下两点,一是循序渐进直观优先,不要太繁杂的数学细节;二是尽量保证理论上的完备和严谨,对于不能严格证明的结论给予说明.简单地说,我们的宗旨是简单直观有趣,让大家学得开心,绝对不是随机过程随机过.

按照复旦大学每周三节课的安排,大致是 17 周内容.尽管每个学期是 18 周,但因提前考试或者放假,每学期实际只有 15 周甚至 14 周,所以需要根据实际情况对内容进行取舍.

讲义是围绕随机过程的首中时这个主题展开的,注重的不是知识而是其中蕴含的数学思想.阅读本讲义所需的概率论知识,可参考 [6].对随机过程理论感兴趣并且想进一步阅读(例如 Kolmogorov 相容性定理)的读者可以参考作者的研究生随机过程教材 [7].

应坚刚

# 目录

|                     |    |
|---------------------|----|
| 序 言                 | i  |
| 第一章 预备知识            | 1  |
| 1.1 单调类方法           | 1  |
| 1.2 可测性与条件期望        | 3  |
| 1.3 随机过程及其分布        | 9  |
| 第二章 简单随机游动          | 15 |
| 2.1 Bernoulli 序列    | 15 |
| 2.2 反射原理            | 17 |
| 2.3 首达概率公式          | 21 |
| 2.4 差分方程            | 23 |
| 2.5 随机游动的马氏性        | 24 |
| 2.6 停时与强马氏性         | 27 |
| 2.7 马氏性的应用          | 30 |
| 第三章 鞅及其应用           | 33 |
| 3.1 鞅与鞅基本定理         | 33 |
| 3.2 鞅的应用: Doob 停止定理 | 36 |
| 3.3 鞅的应用: 不等式与强大数律  | 40 |
| 3.4 鞅的应用: 金融市场      | 44 |

|                          |            |
|--------------------------|------------|
| 目录                       | iii        |
| <b>第四章 马氏链</b>           | <b>53</b>  |
| 4.1 马氏链与转移函数 . . . . .   | 53         |
| 4.2 常返态与暂留态 . . . . .    | 59         |
| 4.3 正常返与遍历性 . . . . .    | 63         |
| 4.4 不变测度与平稳分布 . . . . .  | 66         |
| 4.5 可逆马氏链与电路图 . . . . .  | 71         |
| <b>第五章 泊松过程与布朗运动</b>     | <b>85</b>  |
| 5.1 泊松过程的定义与性质 . . . . . | 85         |
| 5.2 布朗运动的定义与构造 . . . . . | 90         |
| 5.3 简单性质 . . . . .       | 94         |
| 5.4 轨道性质 . . . . .       | 96         |
| 5.5 马氏性及其应用 . . . . .    | 100        |
| 5.6 鞅性质及其应用 . . . . .    | 104        |
| <b>参考文献</b>              | <b>108</b> |

# 第一章 预备知识

作为预备知识, 本章将介绍两个特别重要的一般性工具: 单调类方法与条件期望. 单调类方法是概率论的重要方法, 为一些定理证明提供一般程序, 掌握此方法可以使我们透过细枝末叶直达问题的本质. 条件期望是概率论中不可或缺的重要思想和语言. 这两者也许在概率论课程中有介绍, 参考 [6] 第十章, 但在此很有必要再重复一遍.

## 1.1 单调类方法

概率是定义在  $\sigma$ -代数上的可列可加集总量为 1 的非负集函数. 有时, 很难直接验证一个集类对可列并封闭, 但由于概率有可列可加性, 很容易得到对不交可列并的封闭性. 看下面的例子.

设  $\xi, \eta$  是两个  $n$  维随机变量, 那么下面断言是等价的:

- (1) 对任何  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbb{P}(\xi \leq x) = \mathbb{P}(\eta \leq x)$ ;
- (2) 对任何 Borel 集  $B$ ,  $\mathbb{P}(\xi \in B) = \mathbb{P}(\eta \in B)$ ;
- (3) 对任何有界 (或非负) Borel 可测函数  $f$ ,  $\mathbb{E}f(\xi) = \mathbb{E}f(\eta)$ .

从 (1) 到 (2) 到 (3) 是一个逐渐一般化的过程. 从 (2) 到 (3) 比较容易, 事实上, (2) 推出 (3) 对于简单函数成立, 然后应用单调收敛定理推出 (3) 对于非负 Borel 可测函数成立. 但从 (1) 到 (2) 有本质的困难, 而且这个困难具有普遍性. 令  $\mathcal{B}$  是使得 (2) 成立的  $B$  全体, 那么  $\mathcal{B}$  包含  $\emptyset$  与  $\Omega$ , 对补集运算封闭, 另外由概率的可列可加性推出它对于不交可列并运算封闭, 但无法直接推出对于可列并运算封闭, 所以  $\mathcal{B}$  不是一个  $\sigma$ -代数, 故也无法推出 (2) 成立. 怎么弥补这个缺陷呢?

先介绍两个概念, 称一个子集类是  $\pi$ -类, 如果它对有限交封闭. 称一个子集类是  $\lambda$ -类, 如果它包含有  $\emptyset, \Omega$  且对于补集运算与不交可列并运算封闭. 显然,  $\sigma$ -域是  $\pi$ -类和  $\lambda$ -类.

练习 1.1.1 (1) 举例说明  $\lambda$ -类不一定是  $\sigma$ -代数. (2) 如果  $\mathcal{G}$  既是  $\lambda$ -类又是  $\pi$ -类, 则  $\mathcal{G}$  是  $\sigma$ -代数.

容易看出任意多个  $\lambda$ -类的交仍是  $\lambda$ -类, 因此对  $\Omega$  的任何子集类  $\mathcal{A}$ , 唯一存在一个包含  $\mathcal{A}$  的最小  $\lambda$ -类, 记为  $\lambda(\mathcal{A})$ , 也类似地称为由  $\mathcal{A}$  生成的  $\lambda$ -类.<sup>1</sup>

定理 1.1.1 设  $\mathcal{F}_0$  是一个  $\pi$ -类,  $\mathcal{F}$  是一个  $\lambda$ -类且  $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_0$ . 则  $\mathcal{F} \supset \sigma(\mathcal{F}_0)$ . 简单地说, 一个包含  $\pi$ -类的  $\lambda$ -类必包含该  $\pi$ -类生成的  $\sigma$ -代数.

证明. 因为  $\mathcal{F} \supset \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 故证明  $\lambda(\mathcal{F}_0)$  是一个  $\sigma$ -域就够了. 由定义, 仅须验证  $\lambda(\mathcal{F}_0)$  对有限交运算封闭. 任取  $A \in \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 定义

$$\kappa[A] := \{B \in \lambda(\mathcal{F}_0) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{F}_0)\}.$$

只要证明对任何  $A \in \lambda(\mathcal{F}_0)$ ,  $\kappa[A] \supset \lambda(\mathcal{F}_0)$ .

先验证  $\kappa[A]$  是一个  $\lambda$ -类. 事实上, 只需证明  $\kappa[A]$ :

(1) 对补集运算封闭. 取  $B \in \kappa[A]$ , 则  $A, A^c, A \cap B \in \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 因此  $A \cap B^c = [A^c \cup (A \cap B)]^c \in \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 因此  $B^c \in \kappa[A]$ .

(2) 对不相交集列的可列并运算封闭. 取  $\{B_n\} \subset \kappa[A]$  是不交集列, 则显然  $\{A \cap B_n\}$  是  $\lambda(\mathcal{F}_0)$  中不相交集列, 因此  $A \cap (\bigcup_n B_n) \in \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 推出  $\bigcup_n B_n \in \kappa[A]$ .

因  $\mathcal{F}_0$  是  $\pi$ -类, 故  $A \in \mathcal{F}_0$  蕴含着  $\kappa[A] \supset \mathcal{F}_0$ , 即  $\kappa[A] \supset \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 或者说  $\mathcal{F}_0$  中的集合与  $\lambda(\mathcal{F}_0)$  中的集合的交在  $\lambda(\mathcal{F}_0)$  中. 再换句话说, 当  $A \in \lambda(\mathcal{F}_0)$  时,  $\kappa[A] \supset \mathcal{F}_0$ . 因此  $\kappa[A] \supset \lambda(\mathcal{F}_0)$ , 即  $\lambda(\mathcal{F}_0)$  是  $\pi$ -类.  $\square$

回到上面的例子, 用  $\mathcal{F}_0$  表示  $(-\infty, x]$  这样的区间全体, 它是个  $\pi$ -类, 因此

$$\mathcal{B} \supset \sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(\mathbf{R}),$$

完成证明.

---

<sup>1</sup> $\pi$ -类和  $\lambda$ -类这两个概念以及下面的定理是 Dynkin 在 1959 年出版的著作中引入的, 所以也称为 Dynkin 引理, 但其思想在 Sierpinski 1918 年的文章中已经出现.

可以看出 Dynkin 引理将对  $\pi$ -类成立的等式推广到对它生成的  $\sigma$ -代数成立, 线性性质与单调收敛定理将对  $\sigma$ -代数成立的等式推广到对关于它可测的非负随机变量成立, 这两者结合起来证明一个等式从示性函数成立推出对任何非负或者有界可测函数成立的方法称为单调类方法. 它是分析特别是概率论的基本方法之一, 现在成为一种标准的证明程序. 后面, 当我们说使用单调类方法时, 就是指这样的一个程序: Dynkin 引理和单调收敛定理.

**例 1.1.1 (Kolmogorov 0-1 律)** 设  $\{\xi_n : n \geq 1\}$  独立随机序列, 定义尾事件域

$$\mathcal{G} = \bigcap_n \sigma(\xi_k : k > n),$$

**证明:** 对任何  $A \in \mathcal{G}$ ,  $A$  的概率是 0 或 1. 定义

$$\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_k : k \leq n), \quad \mathcal{G}_\infty = \sigma(\xi_k : k \geq 1)$$

显然对任何  $n$ ,  $\mathcal{G}$  与  $\mathcal{G}_n$  独立, 因为  $\sigma(\xi_k : k > n) \supset \mathcal{G}$  且与  $\mathcal{G}_n$  独立. 这里两个事件类独立是指任意从中各取一个事件是独立的. 因此  $\mathcal{G}$  与  $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{G}_n$  独立. 用  $\mathcal{H}$  表示  $\mathcal{G}_\infty$  中与  $\mathcal{G}$  独立的事件全体, 那么  $\mathcal{H}$  是  $\lambda$ -类且包含  $\pi$ -类  $\mathcal{A}$ , 应用单调类方法,  $\mathcal{H} \supset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}_\infty$ , 即  $\mathcal{G}$  与  $\mathcal{G}_\infty$  独立, 推出  $\mathcal{G}$  与自身独立, 因此有 0-1 律.

**练习 1.1.2 (Fubini)** 设随机变量  $\xi, \eta$  独立,  $f$  是  $\mathbf{R}^2$  上非负或者有界可测函数. 证明:

$$\mathbb{E}f(\xi, \eta) = \mathbb{E}[\mathbb{E}f(x, \eta)]_{\{x=\xi\}}.$$

## 1.2 可测性与条件期望

众所周知, 概率空间由样本空间, 事件域与概率三部分组成. 如果把看作海中的冰山, 那么样本空间和概率是浮在水面上的那部分, 而事件域是水面之下的那部分. 如古典概率, 只需关心样本空间与概率, 不需要关心事件域, 不论懂不懂数学, 任何人都可以理解和做题, 但要深入学习概率论, 就必须理解事件域与可测性. 这第一章预备知识实际上是围绕可测性展开的.

随机变量是随机现象结果的数字表示, 它的取值在现实中是无法预知的, 期望是它的一个大概的估计. 但是基于已知的信息那就可能有更好的估计, 这大概是条件期望的思想. 如要找一个罪犯, 侦探总是通过某些信息来推断, 慢慢地缩小搜寻范围. 在讲条件期望前, 还需要从直观和理论两方面理解事件域和可测这两个概念, 事件域

是事件的集合, 大概是指样本空间的分类, 直观地说, 我们不知道罪犯具体信息, 但知道罪犯在哪个区域活动, 或者知道罪犯的年龄范围, 又或者知道罪犯大概的体重身高. 也就是说知道一些信息, 所以我们把事件域叫做信息, 注意这里所说的信息只是一个更形象一点的词, 不是信息论中所说的信息. 直观地说, 一个随机现象确定一个概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 设  $\mathcal{G}$  是子事件域, 我们说掌握信息  $\mathcal{G}$ , 或者说给了这个信息, 是指对于这个随机现象来说, 我们知道  $\mathcal{G}$  中每一个事件是否发生.

**例 1.2.1** 掷一个骰子,  $\Omega$  是  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\mathcal{F}$  是所有子集全体, 所有信息, 掌握它即知道是什么点,  $\mathcal{G}$  是  $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$  生成的事件域, 掌握它即知道大小,  $\mathcal{G}'$  是  $\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}$  生成的事件域, 掌握它即知道奇偶. 如果一个人同时掌握了大小与奇偶的信息, 那么他掌握了事件  $\{1, 3\}, \{2\}, \{4, 6\}, \{5\}$  给出的信息, 但还不一定能确定是什么点.

不同的人掌握不同的信息. 事件域的定义要求可以解释为信息具有某种相容性, 直观地说假设人懂得逻辑地思考, 不懂得逻辑地思考的人虽然可能知道许多知识片段, 但不能说就是信息, 因为这些知识片段不一定相容, 例如有的人有时引用科学的同时又轻易迷信. 信息的多少体现在哪里? 体现在它对于  $\Omega$  的分辨有多细. 例如, 如果一个人除了名字不知道任何关于斯里兰卡的事情, 那么他关于斯里兰卡的信息就是一块地方, 无法区分其中的什么省什么市. 而一个来自斯里兰卡的人可以告诉你什么地方有什么样的风土人情. 特别地,  $\mathcal{G}$  中的原子是它的一个不可再分辨的元素, 即一个随机变量  $X$ , 或者随机向量, 或者随机过程, 给出的信息是指它所生成的子事件域  $\sigma(X)$ .

可测性是大家熟悉的概念, 一个随机变量  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  可测是指对任何  $y \in \mathbf{R}$  有  $\{Y \leq y\} \in \mathcal{G}$ . 这等价于对任何 Borel 集  $B$ ,  $Y^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ . 或者说  $\sigma(Y) \subset \mathcal{G}$ . 直观地说, 如果  $\mathcal{G}$  的信息掌握了, 那么  $Y$  就是确定的.

**练习 1.2.1** 非空集  $A \in \mathcal{G}$  称为  $\mathcal{G}$  的原子, 如果除了空集和  $A$  自己, 它不再包含  $\mathcal{G}$  的其他元素作为子集. 证明: 如果  $Y$  是  $\mathcal{G}$  可测的, 那么  $Y$  在  $\mathcal{G}$  的原子上是常数.

设  $\{\Omega_j : 1 \leq j \leq n\}$  是有限或者可数个非空的事件, 而且是  $\Omega$  的分类, 则其生成的子事件域  $\mathcal{G} = \sigma(\{\Omega_j : 1 \leq j \leq n\})$  中,  $\Omega_j$  是原子. 这样的子事件域称为离散的, 或者是由原子组成的. 那么关于  $\mathcal{G}$  可测的随机变量  $Y$  可以写成

$$Y = \sum_{j=1}^n a_j 1_{\Omega_j}.$$



这给我们另外一种角度看待信息和可测：显示器怎么显示一张图片？样本空间  $\Omega$  的元素构成显示屏的显示光点，信息  $\mathcal{G}$  是显示点的一个分类，其中原子  $\Omega_j$  中的点总是显示同一种颜色，这样形成一种分辨模式<sup>2</sup>，确定了分辨模式的显示屏称为一个显示器，也就是说信息  $\mathcal{G}$  可以看作一个显示器。一个随机变量是  $\Omega$  到  $\mathbf{R}$  的映射，映射值可以看成颜色，所以随机变量可以等同于一张图片，而随机过程等同于一视频。如果  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  可测，那么上面的结论说它在  $\Omega_j$  的所有点上是一个颜色，这样图片就可以在显示器上清晰显示，所以关于  $\mathcal{G}$  可测意味着图像可以在该显示器上清晰地显示，毫无损失。一般来说，随机变量  $Y$  不一定关于  $\mathcal{G}$  可测，它在  $\Omega_j$  不一定是同一个颜色，要在  $\mathcal{G}$  这个显示器上显示，必须重新调整颜色，这样显示的和原来的图片不同。当然  $\mathcal{F}$  是最强大的显示器，所有随机变量作为图片都可以清晰显示。下面的引理是更一般的结论，当  $X$  是简单随机变量时就是上面的结果。

**引理 1.2.1**  $Y$  关于  $X$  可测，即  $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$ ，当且仅当  $Y$  是  $X$  的函数，即存在 Borel 可测函数  $f$  使得  $Y = f(X)$ 。结论当  $X, Y$  是随机向量时也成立。

事实上，只需验证对任何 Borel 可测的  $g$  有 Borel 可测的  $f$  使得  $g(Y) = f(X)$ 。而这由下面显然的事实推出：对任何的 Borel 可测集  $B$ ， $\{Y \in B\} \in \sigma(X)$ ，故存在 Borel 可测集  $A$  使得  $\{Y \in B\} = \{X \in A\}$ ，即  $1_B(Y) = 1_A(X)$ 。

尽管我们无法预测一个随机变量的取值，但如果知道它的随机性，那么总还是有期望的。实际上，期望是在不确定情况下讨论问题的关键。如果我获得额外的信息，那么期望就会改变。额外信息下的期望是条件期望。

**例 1.2.2** 条件期望的概念可追溯到 Fermat 和 Pascal 讨论的分赌注问题。甲乙两个人以三局两胜的游戏决定 64 元赌注的归属。未来不确定的时候应该怎么分钱？他们的共识或者直觉是按照期望分钱，而期望实际上与赢的概率成比例。在游戏开始前，两人对于赌注的期望是一样的，各一半。在第一局之后，两人对于赌注的期望就会不同：第一局的胜者（例如是甲）期望更高，48 元，占总赌注的  $3/4$ ，败者的期望为 16，占  $1/4$ 。这是为什么呢？Pascal 是这样解释的：如果继续比一局，则有相同的两种可能，甲乙的比分是 2:0 或者 1:1。显然甲的期望是全部赌注 64 或者一半赌注 32，因此之前甲的期望是 48，即两者的平均。

显然，条件期望随条件而变化，即甲胜的话其期望是 48，否则的话其期望是 16，在这个意义下它是个随机变量。

<sup>2</sup>生活中使用的显示器是矩形点阵的，所以用分辨率来表示分辨模式

例 1.2.3 袋子 1 中有  $a$  个白球  $b$  个黑球, 从中随机地取  $n$  个球放到袋子 2 中, 再从袋子 2 中随机地取一个球, 用  $A$  表示该球是白色这个事件. 因为袋子 2 中白球的个数不确定, 所以很难立刻得到  $\mathbb{P}(A)$ . 用  $X$  表示袋子 2 中白球个数. 那么当  $X$  已知时,  $A$  的概率就是显然的, 即是条件概率

$$\mathbb{P}(A|X = k) = \frac{k}{n}.$$

这个等式也说成当白球个数  $X$  给定时,  $A$  的概率是  $X/n$ , 写成

$$\mathbb{P}(A|X) = \frac{X}{n},$$

称为  $A$  关于 (随机变量)  $X$  的条件概率 (期望).

再回到离散子事件域  $\mathcal{G}$ . 概率论中最重要的公式之一是全概率公式: 对任何  $A \in \mathcal{F}$ , 有

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A|\Omega_j)\mathbb{P}(\Omega_j).$$

因为事件  $A$  可以看成为随机变量  $1_A$ , 而  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}(1_A)$ . 因此我们可以把全概率公式推广到随机变量情况

$$\mathbb{E}Y = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(Y|\Omega_j)\mathbb{P}(\Omega_j), \quad (1.2.1)$$

其中  $Y$  是一个可积随机变量, 而对于任何事件  $B$ , 类似地定义  $B$  上的平均

$$\mathbb{E}(Y|B) := \frac{\mathbb{E}(Y1_B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

为什么全概率公式成立? 仔细观察(1.2.1), 不难发现右边是随机变量

$$\xi := \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(Y|\Omega_j)1_{\Omega_j}$$

的期望. 这个随机变量称为  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  的条件期望, 记为  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ , 它在原子上的取值是  $Y$  在该原子上的平均, 所以才会有全概率公式  $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\xi$ .

引理 1.2.2 下面三命题等价:

1.  $Y' = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ ;
2.  $Y'$  是  $\mathcal{G}$  可测的且对任何  $\mathcal{G}$  可测的随机变量  $X$ , 有  $\mathbb{E}(Y - Y')^2 \leq \mathbb{E}(Y - X)^2$ ;

3.  $Y'$  是  $\mathcal{G}$  可测的且对任何  $A \in \mathcal{G}$  有  $\mathbb{E}(Y'1_A) = \mathbb{E}(Y1_A)$ .

在此我们验证 1 可以推出 2. 其他证明留作练习. 任意取一个关于  $\mathcal{G}$  可测的随机变量  $X$ , 则  $X = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{\Omega_j}$ . 不难推出  $\mathbb{E}[(Y - Y')(Y' - X)] = 0$ , 因此有

$$\mathbb{E}(Y - X)^2 = \mathbb{E}(Y - Y')^2 + \mathbb{E}(Y' - X)^2 \geq \mathbb{E}(Y - Y')^2,$$

也就是说,  $Y'$  在  $L^2$  距离的意义下在所有关于  $\mathcal{G}$  可测的随机变量中离  $Y$  最近, 而且是唯一的.

**练习 1.2.2** 证明上述引理的其他蕴含关系: 2 蕴含 3, 3 蕴含 1.

还是用上面显示器和图片作为例子来解释, 随机变量  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  的条件期望就是用显示器  $\mathcal{G}$  来显示图片, 使得它与图片  $Y$  最接近. 因为当  $Y$  不是关于  $\mathcal{G}$  可测时, 分辨模式不匹配, 所以图片不可能无损显示. 我们需要选取  $\Omega_j$  中的点的颜色, 使得显示的图片达到最佳效果. 怎么做? 答案就是  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ .

怎么把条件期望的定义推广到一般的事件域  $\mathcal{G}$  呢? 上面引理中的三个等价命题的第三个最适合作为一般条件期望的定义, 因为它被推广时需要的预设条件最少. 考虑一个可积随机变量  $Y$  与  $\mathcal{F}$  的一个子事件域  $\mathcal{G}$ , 我们来定义在某种意义上最接近  $Y$  的  $\mathcal{G}$  可测的随机变量, 称为  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  的条件期望.

**定义 1.2.1** 设  $Y$  是可积的随机变量,  $\mathcal{G}$  是一个子事件域, 那么存在唯一的关于  $\mathcal{G}$  可测随机变量  $Y'$  满足对任何  $A \in \mathcal{G}$ ,  $\mathbb{E}(Y'1_A) = \mathbb{E}(Y1_A)$ , 称为  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  的条件期望, 记为  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ . 如果  $X$  是一个随机变量, 那么  $\mathbb{E}(Y|X) := \mathbb{E}(Y|\sigma(X))$ .

存在性的数学关键是测度论中的 Radon-Nikodym 定理, 唯一性是指几乎处处相等的意义下, 由下面引理证明.

**引理 1.2.3** 如果  $Y_1, Y_2$  都关于  $\mathcal{G}$  可测且满足对任何  $A \in \mathcal{G}$  有  $\mathbb{E}(Y_1 1_A) = \mathbb{E}(Y_2 1_A)$ , 那么  $Y_1 = Y_2$  a.s.

下面关于条件期望的等式或不等式都是在几乎处处的意义下叙述并证明的, 后面应该有 a.s. 标记, 通常省略. 这里强调一下, 要证明一个随机变量  $X$  是条件期望  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ , 必须且只需证明两件事情,  $X$  是  $\mathcal{G}$  可测的, 且对于任何的  $A \in \mathcal{G}$  有  $\mathbb{E}(X1_A) = \mathbb{E}(Y1_A)$ .

随机变量的条件期望有下面的性质, 这些性质完全是由定义推导的.

**定理 1.2.1** (1)  $Y \mapsto \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$  是线性的, 保序的;

(2) 全概率公式的推广:  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})) = \mathbb{E}Y$ ;

(3) 如果  $X, Y$  是随机变量, 且  $X$  是关于  $\mathcal{G}$  可测的, 那么  $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ ;

(4) 如果  $Y$  与  $\mathcal{G}$  独立, 那么  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}Y$ .

(5) 设  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  是子事件域, 且  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ . 那么

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_1);$$

(6)  $\mathbb{E}(Y|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}Y$ ; 若  $Y$  关于  $\mathcal{G}$  可测, 则  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = Y$ .

这些性质中, (2)(6) 是显然的. 我们来证明 (3), 其他类似, 留作练习. (3) 的右边是  $\mathcal{G}$  可测的, 因此我们只需验证对任何  $A \in \mathcal{G}$  有

$$\mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})1_A) = \mathbb{E}(XY1_A).$$

由单调类方法只需对  $X = 1_B, B \in \mathcal{G}$  验证即可. 而这时  $X1_A = 1_{A \cap B}$ , 其中  $A \cap B \in \mathcal{G}$ , 上述等式由  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$  的定义是显然成立的.

练习 1.2.3 证明定理的 (1)(4)(5).

定理 1.2.2 设  $Y$  是平方可积随机变量,  $\mathcal{G}$  是一个子事件域, 那么

$$\mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))^2 = \inf\{\mathbb{E}(Y - X)^2 : X \text{ 是关于 } \mathcal{G} \text{ 可测的平方可积随机变量}\}.$$

证明. 因为  $\zeta$  与  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$  都是关于  $\mathcal{G}$  可测的平方可积随机变量, 故由上面的讨论得

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y - X)^2 &= \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) - X)^2 + 2\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) - X)] \\ &= \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))^2 + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) - X)^2, \end{aligned}$$

由此看出结论是显然的. □

该定理说明条件期望  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$  是  $\mathcal{G}$  可测的随机变量中离  $Y$  最近的那个. 另外从几何的角度来看, Euclid 空间上的一个点到其一个子空间的最短距离是这个点到这个空间的投影的距离. 因此它也说明条件期望的存在. 事实上, 我们可以把平方可积的随机变量全体看成一个内积空间, 内积为  $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY)$ , 它是一个 Hilbert 空间, 而  $\mathcal{G}$  可测的随机变量全体  $G$  是其中的闭子空间. 上面定理说明  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$  是  $Y$  到  $G$  的正交投影, 由 Hilbert 空间的性质, 它是存在且唯一的.

把随机变量  $Y$  看成一个需要预测的随机变量,  $\mathcal{G}$  看成已知信息, 那么  $\mathcal{G}$  可测的随机变量全体是在已知  $\mathcal{G}$  的前提下对  $Y$  的预测全体, 而  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$  恰好是其中离  $Y$  距离最近的一个预测, 或者说是最佳预测. 因此说条件期望  $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$  是已知信息  $\mathcal{G}$  的条件下对  $Y$  的最佳预测. 这样定理 1.2.1 的性质就有很好的解释: (6) 说明当没有信息, 即  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  时, 对  $Y$  的最佳预测就是它的期望, 而当有足够信息, 即  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  时,  $Y$  的最佳预测就是自己; (4) 说明当  $\mathcal{G}$  独立于  $Y$  时, 它透露的信息对预测  $Y$  没有帮助, 此信息和没有信息一样.

练习 1.2.4 设  $X, Y$  是独立同分布的可积随机变量. 猜测  $\mathbb{E}(X|X+Y)$  并验证.

练习 1.2.5 设  $X, Y$  是两个随机变量. 函数  $\mathbb{P}(Y \leq y|X)$  称为  $Y$  关于  $X$  的条件分布, 或者说  $Y|X$  的分布, 类似地  $\mathbb{E}(Y|X)$  称为  $Y|X$  的期望. 设  $(X, Y) \sim N(a, b, \sigma^2, \tau^2, \rho)$ . 求  $Y|X$  的分布以及期望.

定理 1.2.3 条件期望的 Jensen 不等式: 当  $f$  凸时,

$$f(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G}).$$

证明. 凸函数的曲线总在其任意点处的切线之上: 对任何  $x, x_0 \in \mathbf{R}$ ,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

然后  $x, x_0$  分别以  $X, \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  代入得

$$f(X) \geq f(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) + f'(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}))(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})).$$

两边对  $\mathcal{G}$  取条件期望时, 第二项等于零, 因此推出定理结论.  $\square$

最后, 重申一下符号. 对于一个事件  $A$ ,  $1_A$  是示性函数,  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}1_A$ , 对于随机变量  $X$ ,  $\mathbb{E}(X; A) = \mathbb{E}(X1_A)$ . 如果有另一个事件  $B$ , 则  $\mathbb{E}(X; A, B) = \mathbb{E}(X; A \cap B)$ .

## 1.3 随机过程及其分布

什么是随机过程? 简单地说, 随机过程就是以时间顺序记录的随机变量族, 例如, 某地气温, 水位的记录; 某个随风飘动的灰尘的位置记录; 银行某个窗口服务人流量的记录, 股票价格变化的记录, 等等. 在课程正式开始之前, 同学们要问自己一个问题. 学完了概率论, 你觉得概率论究竟在研究什么? 简单地说, 概率论研究随机

变量及其分布. 随机变量的值是不确定的, 是不可预测的, 因此我们只好通过它取值的可能性来研究它, 也就是分布或者说期望. 换句话说, 未来无法预知, 只能预期. 相应地说, 随机过程理论更多的是研究随机过程的分布. 本节将介绍随机过程的分布.

设  $T$  是时间集, 通常是实数的一个子集.

**定义 1.3.1** 概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上以时间记录的随机变量族  $X = (X_t : t \in T)$  被称为随机过程. 确切地说, 对任何  $t \in T$ ,  $X_t$  是一个随机变量.

在本课程中, 我们只关注两种情况: 离散时间, 即  $T$  是非负整数集, 或者连续时间, 即  $T$  是非负实数集. 离散的时间通常用  $n$  表示, 对应的随机过程写成  $X = (X_n)$ , 称为离散时间随机过程或者随机序列. 随机序列实际上在概率论中有很多讨论, 如随机序列的收敛性, 大数定律与强大数定律. 在本课程中, 第二、三、四章讨论的是随机序列, 第五第六章讨论的是连续时间随机过程.

随机过程主要关心样本轨道的概率性质, 即满足某种轨道性质的可能性有多大. 例如, 随机序列  $\{X_n\}$  的样本轨道  $X_n(\omega)$ ,  $n \geq 1$ , 是一个数列, 那么  $(X_n)$  满足某个性质 (如收敛或者有界等) 是指事件  $\{\omega \in \Omega : (X_n(\omega)) \text{ 满足某个性质}\}$ , 是样本轨道性质. 如果此概率为 1, 那么我们说几乎所有样本轨道满足该性质. 例如, 几乎处处收敛就是几乎所有样本轨道收敛, 是轨道的概率性质. 严格地说, 依概率收敛不算是轨道的概率性质, 尽管它可能蕴含轨道的概率性质, 例如有一个子列几乎处处收敛. 概率论中学过一个例子, 一个随机序列依概率收敛于 0 但收敛的概率是零, 也就是几乎所有轨道都是发散的.

随机过程实际上有两个变量: 时间  $t$  与样本  $\omega$ . 固定时间  $t$ ,  $X_t$  是一个随机变量, 固定样本  $\omega$ ,  $X_t(\omega) = X(t, \omega)$  是一个函数, 也称为样本  $\omega$  的轨道, 简称为样本轨道. 随机过程有一些基本的命名, 如每个随机变量都可积 (或者平方可积) 的随机过程称为可积 (平方可积) 随机过程. 按照样本轨道看, 几乎所有样本轨道右连续或者连续的随机过程被称为右连续或者连续 (随机) 过程, 几乎所有样本轨道是递增函数的随机过程被称为递增过程. 当然, 随机过程中重要的是概率  $\mathbb{P}$ , 它决定了随机过程轨道的概率性质它如同一个过滤镜, 只看到它让我们看到的轨道 (概率 1).

本课程将介绍并研究几类随机过程及其性质, 它们描述并模拟现实生活的某些现象, 应用广泛. 第二章第三章将分别用马氏性和鞅方法研究随机游动, 第四章将介绍马氏链, 第五章介绍更新过程与 Poisson 过程, 第六章介绍并研究布朗运动. 在自然科学中, 研究一个对象通常无需考虑其是否存在的问题, 因为它一般是自然存在的

事物,但在研究一个数学概念时,在关注其直观性的同时我们必须关注其理论上的存在问题,因为概念是人为定义的,可能会发生其实也真实发生过因为定义自身的矛盾使得研究对象实际上是个空集的情况.怎么获得所讨论的随机过程的存在性?通常有两个途径,一个是通过被证明已经存在的概率空间与随机变量来构造新的随机变量和随机过程.例如,在概率论课程中,我们假设概率空间上有一个随机变量  $\xi$  服从  $[0,1]$  上均匀分布,那么我们可证明服从任何分布函数  $F$  的随机变量存在.参考 [6] 的定理 5.2.1. 我们也证明了均匀分布随机变量的存在性等价于独立同分布且等可能地取值 0 与 1 的随机序列  $\{X_n : n \geq 1\}$  的存在性. 参考 [6] 的例 3.1.1. 后者真实地模拟无穷多次地掷硬币这个概率模型,所以简称为掷硬币序列. 均匀分布随机变量存在等价于  $[0,1]$  上存在 Lebesgue 测度,这里我们不加证明地承认这个结论. 承认它,我们就有下面更一般的定理: 任何分布的独立同分布随机序列存在. 参考 [6] 的定理 10.2.2.

**定理 1.3.1** 对任何分布函数  $F$ , 存在独立且分布函数都是  $F$  的随机变量序列.

**练习 1.3.1** 将一个掷硬币序列不重复地写成可列个掷硬币序列, 然后证明上面定理.

独立随机序列的存在性可以帮助我们构造本讲义中大部分随机过程, 例如随机游动, Poisson 过程与布朗运动. 但不是所有随机过程都可以这样来构造, 在很多场合, 我们需要借助概率论中奠基性的 Kolmogorov 相容性定理.

下面我们介绍分布与随机过程的分布. 给定概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  以及随机变量  $X$ , 其分布的定义是

$$\mu(B) := \mathbb{P}(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

因为  $\{X \in B\}$  是  $B$  的逆像  $X^{-1}(B)$ , 所以像测度  $\mu$  也形象地记为  $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ . 分布是  $\mathbf{R}$  上的概率, 是由  $X$  把  $\mathbb{P}$  诱导到  $\mathbf{R}$  上的, 所以也称为  $\mathbb{P}$  在  $X$  下的像测度. 在欧氏空间上, 分布通常用更简单更熟悉的分布函数表达,

$$F(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

分布函数是一个递增右连续函数, 但重要的是分布与分布函数是互相唯一决定的. 在本课程中, 我们不再区分分布与分布函数.

可以说,  $X$  的分布包含了  $X$  在原概率空间中的所有概率性质. 这时,  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu)$  也是概率空间, 且  $\xi(x) = x, x \in \mathbf{R}$ , 是一个随机变量, 其分布就是  $\mu$ , 所以我们说  $X$  与  $\xi$  同分布. 因为后者更简单具体, 所以像测度将抽象问题具体化. 这个思想非常

重要, 可以推广到一般的空间上.

现在给定一个抽象的空间  $E$  以及  $E$  的某些子集组成的一个  $\sigma$ -代数  $\mathcal{E}$ , 那么  $(E, \mathcal{E})$  被称为一个可测空间. 现成的例子就是欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  及其 Borel 子集. 任何一个拓扑空间的开集全体生成的  $\sigma$ -代数被称为 Borel  $\sigma$ -代数, 其中的集合称为 Borel 集, 这是拓扑诱导的可测结构.

**定义 1.3.2**  $\Omega$  到  $E$  的映射  $X$  称为是可测的 (相对于给定的  $\sigma$ -代数), 如果对任何  $B \in \mathcal{E}$  有  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , 或者记为  $X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$ , 其中  $X^{-1}(\mathcal{E})$  自然地表示  $\mathcal{E}$  中集合的逆像全体.

分布是很容易推广到一般空间的. 设  $X$  是  $\Omega$  到  $E$  的可测映射. 定义

$$\mu(B) := \mathbb{P}(\{X \in B\}), \quad B \in \mathcal{E}.$$

**定理 1.3.2**  $\mu$  是  $(E, \mathcal{E})$  上的概率测度.

证明非常简单, 关键是由映射的定义可以推出不交的集合的逆像也是不交的. 概率  $\mu$  被称为是  $X$  在  $E$  上的分布, 或者  $\mathbb{P}$  关于  $X$  的像测度, 记为  $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ , 或  $\mathbb{P}(X \in dx)$ . 类似地,  $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P} \circ X^{-1})$  是个概率空间, 其上的恒等映射与  $X$  同分布,  $X$  的函数  $f(X)$  的期望可转换为  $E$  上的期望

$$\mathbb{E}f \circ X = \mathbb{E}f(X) = \int_E f(x) \mathbb{P}(X \in dx).$$

注意概率通常也用期望的方式表示,  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}1_A$ , 或者

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{E}1_{B \circ X}.$$

遗憾的是分布函数的概念无法推广到一般空间上.

随机过程是一族随机变量, 但是它也可以看成是一个随机映射, 所以也有分布. 设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  是概率空间,  $T$  是时间集,  $(E, \mathcal{E})$  是一个可测空间,  $X = (X_t : t \in T)$  是其上的以  $(E, \mathcal{E})$  为状态空间的随机过程. 在本讲义中,  $T$  通常假设是非负整数集或者是非负实数集,  $E$  是可数集或者欧氏空间. 通常的观点是说随机过程是一族随机变量, 现在我们用不同的视角来重新审视随机过程.

随机过程的样本轨道是指  $(X_t(\omega) : t \in T)$ , 其中  $\omega \in \Omega$  是一个样本, 它实际上是  $T$  到  $E$  的一个映射, 也称为轨道. 我们用  $E^T$  表示  $T$  到  $E$  的映射全体, 或者说轨道空间. 那么随机过程可以看成为样本空间  $\Omega$  到轨道空间  $E^T$  的映射:

$$X : \Omega \longrightarrow E^T.$$



现在, 样本空间上有一个概率测度  $\mathbb{P}$ , 它会在轨道空间上诱导出一个概率测度. 在此之前, 轨道空间上需要有一个  $\sigma$ -代数使得  $X$  是可测的.

轨道空间  $E^T$  也就是  $E$  的以  $T$  为幂的乘积空间, 称为无穷乘积空间. 它到  $E$  有一个自然的投影映射,

$$Z_t(w) = w(t), \quad w \in E^T,$$

其中  $w = w(t)$  是一条轨道. 现在, 把  $E^T$  上使得坐标过程  $(Z_t : t \in T)$  中的所有随机映射可测的最小  $\sigma$ -代数记为  $\mathcal{E}^T$ , 即

$$\mathcal{E}^T = \sigma\left(\bigcup_{t \in T} Z_t^{-1}(\mathcal{E})\right),$$

称为柱集生成的  $\sigma$ -代数, 它就是我们需要的  $\sigma$ -代数.

**练习 1.3.2** 设  $E = \mathbf{R}, \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbf{R}), T = [0, \infty)$ , 再设  $C$  是  $E^T$  中的连续函数全体,  $W \subset C$ . 问  $W \in \mathcal{E}^T$ ? 提示: 先证明: 如果  $A \in \mathcal{E}^T$ , 那么存在至多可数集  $S \subset T$ , 使得对于任何  $f, g \in A$ , 如果  $f|_S = g|_S$ , 那么或者  $f, g \in A$  或者  $f, g \in A^c$ . 然后判断  $W$  是否有这个性质.

这时,  $Z = (Z_t : t \in T)$  是以  $T$  为时间集, 以  $(E, \mathcal{E})$  为状态空间的随机过程, 称为坐标过程或者典则过程. 随机过程  $X = (X_t : t \in T)$  定义了一个从  $\Omega$  到  $E^T$  的映射, 即把样本  $\omega$  映射为样本轨道  $t \mapsto X_t(\omega)$ .

**引理 1.3.1** 映射  $X$  是可测的.

实际上,  $\mathcal{E}^T = \sigma(Z_t : t \in T)$ , 且对任何  $t \in T$ ,

$$X_t = Z_t \circ X.$$

对任何  $A \in \mathcal{E}$ ,  $X^{-1}(Z_t^{-1}(A)) = X_t^{-1}(A)$ , 推出  $X^{-1}(Z_t^{-1}(\mathcal{E})) = X_t^{-1}(\mathcal{E})$ . 因逆像与  $\sigma$  以及并运算可换, 所以

$$\begin{aligned} X^{-1}(\mathcal{E}^T) &= X^{-1}\left(\sigma\left(\bigcup_{t \in T} Z_t^{-1}(\mathcal{E})\right)\right) \\ &= \sigma\left(\bigcup_{t \in T} X^{-1}(Z_t^{-1}(\mathcal{E}))\right) = \sigma\left(\bigcup_{t \in T} X_t^{-1}(\mathcal{E})\right) \subset \mathcal{F}. \end{aligned}$$

由该引理可知,  $X$  在  $(E^T, \mathcal{E}^T)$  诱导出一个像测度. 像测度  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$  就是随机过程  $X$  的分布. 随机过程的所有概率性质都隐含在分布中. 直观地, 一个轨道性

质是  $E^T$  的一个可测子集  $A$ ,  $X$  的轨道满足该性质的概率等于  $\mathbb{P}_X(A)$ . 实际上, 轨道空间上坐标过程  $Z = (Z_t : t \in T)$  是概率空间  $(E^T, \mathcal{E}^T, \mathbb{P}_X)$  上的随机过程, 它是用来描述轨道性质的基本工具, 它与  $X$  同分布, 即

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}_X(Z \in A).$$

因为  $\mathbb{P}_X$  就是随机过程的分布, 所以研究随机过程  $X$  的概率性质就等于研究轨道空间  $E^T$  上的概率  $\mathbb{P}_X$ . 因此, 在后面, 在研究随机过程  $X$  时, 我们通常代之以研究轨道空间上的轨道过程  $(Z_t)$  和概率  $\mathbb{P}_X$ , 这样做更为简单和直观.

**练习 1.3.3** 设  $E = \mathbf{R}, \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbf{R}), T = [0, \infty)$ ,  $C$  是  $E^T$  中的连续函数全体. 设  $X = (X_t)_{t \in T}$  是  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上一个随机过程, 分布为  $\mathbb{P}_X$ . 假设  $X$  连续, 这是指它的几乎所有轨道连续, 即存在概率 1 的事件  $\Omega_0 \in \mathcal{F}$  使得对任何  $\omega \in \Omega_0$ , 样本轨道  $t \mapsto X_t(\omega)$  连续, 即  $\Omega_0 \subset X^{-1}(C)$ . 注意,  $C$  本身不是可测集, 所以不能说  $\mathbb{P}_X(C) = 1$ . 一个概率空间中的一个不可测集, 当然不能谈论测度, 但可以谈论它的内测度与外侧度, 外侧度是包含该不可测集的所有可测集的测度的下确界, 反之, 内测度是包含于这个不可测集的所有可测集的测度的上确界. 证明:  $C$  的外测度是 1, 内测度是 0.  $X^{-1}(C)$  的内外测度都是 1.

## 第二章 简单随机游动

随机过程直观上是随机现象中按时间顺序记录的数据, 它的研究对象通常是依序排列的无限多个随机变量. 最简单的随机过程是随机游动, 它是指独立同分布随机变量序列组成的部分和序列. 在实际中有许多例子, 如重复一个同样输赢可能性的赌博. 但它的理论研究起源于 1708 年法国学者 Remond de Montmort. 所以, 随机游动的研究已有很长的历史.

在这一章中, 我们将用不同的方法研究随机游动. 首先是用经典的组合方法来讨论对称简单随机游动, 整数上对称简单随机游动是随机游动中最简单的一类, 它在每个点处向左和向右的可能性是一样的, 这种随机游动可以简单地由掷一枚公正的硬币的方式来实现. 在第二部分我们介绍强马氏性, 然后用这个方法研究简单随机游动的一些问题.

### 2.1 Bernoulli 序列

最简单的随机试验包含两个结果 (通常用成功与失败, 或者 1 与 0, 或者 1 与  $-1$  表示), 称为 Bernoulli 试验, 概率分别为  $0 < p < 1$  与  $q = 1 - p$ , 例如掷硬币. 概率论中最普遍的问题就是重复 Bernoulli 试验, 例如二项分布是重复  $n$  次 Bernoulli 试验其中成功次数的分布.

现在我们研究随机游动, 假设一直独立地重复 Bernoulli 试验,  $\xi_n$  表示第  $n$  次试验的两个结果  $1, -1$ , 概率分别为  $p, q$ , 用  $p(x)$  表示该分布律. 那么  $\{\xi_n\}$  是一个独立同分布的随机序列, 也称为 Bernoulli 序列. 令  $X_0 = 0$ ,  $X_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ , 也是一个随机序列, 称为原点出发的简单随机游动, 记为  $X = (X_n)$ , 除非特别说明,  $n$  约定是非负整数. 是本章以及下一章关注的焦点, 因为它模拟一场简单赌博中其

中一个赌徒的财富积累过程, 所以在金融领域有深刻的背景. 简单随机游动通常分三种情况: 右偏  $p > 1/2$ , 左偏  $p < 1/2$ , 对称  $p = 1/2$ . 左与右类似, 因此通常只需关注右偏和对称两种情况.

随机游动的样本轨道有什么性质可以研究呢? 我们拿下面一个简单问题来进行讨论: 设  $a$  是整数, 随机游动  $(X_n)$  是否一定到达  $a$ ? 从字面看, 这是指事件  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = a\}$ . 但更方便的是引入一个重要的随机时间

$$T_a := \inf\{n \geq 1 : X_n = a\},$$

称为  $a$  的首中时. 首中时是本课程的重要研究对象之一. 注意定义中的  $n$  是从 0 开始与从 1 开始稍有不同. 因为  $S_0 = 0$ , 所以当  $a \neq 0$  时,  $T_a = \inf\{n \geq 0 : X_n = a\}$ , 而当  $a = 0$  时, 这两者是不同的. 后面我们会看到, 由此定义的时间也很有用, 在此称为进入时以示区别. 由于随机游动是一步一步移动的, 故  $T_a$  也称为首次通过时,  $T = T_0$  直观地称为首次返回时. 约定  $\inf \emptyset = \infty$ , 因此事件  $\{T_a < \infty\}$  表示随机游动的轨道在有限时间内碰到  $a$ , 我们关注概率  $\mathbb{P}(T_a < \infty)$ . 当此概率为 1 时, 再考虑其期望与分布.

在概率论课程中, 我们已经知道  $X_n$  满足大数定律, 即依概率收敛的意义下

$$\frac{X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[\xi_1].$$

这是由 Bernoulli 在 300 多年前证明的, 这种收敛方式比几乎必然 (几乎处处) 要弱. 然后由 Borel-Cantelli 引理, Borel 在 100 年前证明了上述收敛在几乎处处的意义下也是成立的. 在这里几乎处处的意义, 也就是几乎所有的样本轨道具有所述的性质. 如果随机游动右偏, 那么  $\mathbb{E}[\xi_1] = p - q > 0$ ,  $X_n$  几乎处处趋于正无穷, 这意味着几乎所有的样本轨道趋于正无穷, 即赌徒赢的可能性是 1. 当  $a > 0$  时, 因为  $\{\lim_n X_n = +\infty\} \subset \{T_a < \infty\}$ , 所以  $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$ , 即轨道肯定到达  $a$ . 当  $a$  是负整数时却难以回答. 因为

$$\bigcap_{a < 0} \{T_a < \infty\} = \{\inf X_n = -\infty\},$$

而右边事件的概率是零, 所以  $\mathbb{P}(T_a < \infty)$  随着  $a$  递减趋于  $-\infty$  而递减趋于零. 这还不足以判断对给定的负整数  $a$  是否  $\mathbb{P}(T_a < \infty) < 1$ . 但如果应用  $\{\xi_n\}$  独立同分布的性质, 那么我们可以做到这一点.

练习 2.1.1 证明: 在  $q < p$  时,  $\mathbb{P}(T_{-1} < \infty)$  与  $\mathbb{P}(T < \infty)$  小于 1. 提示: 严格地证明  $\mathbb{P}(T_{-1} < \infty) = q + p\mathbb{P}(T_{-2} < \infty)$ , 直观上, 随机游动往左或者右, 往左就到  $-1$ , 往右到  $1$  然后等待访问  $-1$ , 相当于从  $0$  等待访问  $-2$ . 这足以推出结论.

对称时会怎么样? 强大数定律只是说  $X_n/n$  的极限是零, 这只是说  $|X_n|$  相比于  $n$  是很小的, 这不能告诉我们  $X_n$  最终是正还是负, 也不能告诉我们当  $n$  趋于无穷时,  $X_n$  会不会趋于无穷, 是有界还是无界, 或者有没有极限, 等等.

让我们证明几乎所有的轨道是无界的, 即

$$\mathbb{P}(\sup_n X_n = \infty) = 1.$$

首先它属于  $\{\xi_n\}$  的尾事件域, 因为  $\sup_n X_n$  是否有限与  $\{\xi_n\}$  的前有限个无关. 因此由 Kolmogorov 01 律, 它的概率非 0 即 1. 我们只需证明概率非零即可. 为此, 应用中心极限定理和 Fatou 引理, 得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_n X_n = \infty) &\geq \mathbb{P}(\overline{\lim}_n \{X_n > \sqrt{n}\}) \\ &\geq \lim_n \mathbb{P}(X_n > \sqrt{n}) = 1 - \Phi(1) > 0. \end{aligned}$$

然后利用随机游动的对称性, 即  $(-X_n : n \geq 1)$  与  $(X_n : n \geq 1)$  同分布, 推出  $\mathbb{P}(\inf_n X_n = -\infty) = 1$ . 那么

$$\mathbb{P}(\sup_n X_n = +\infty, \inf_n X_n = -\infty) = 1.$$

这证明  $(X_n)$  的样本轨道不可能收敛, 也不会趋于无穷, 实际上它的轨道是震荡的, 而且振幅会无限变大. 因为该随机游动本身是一步一步走的, 所以它的轨道会走遍所有的整数态, 即

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{a \in \mathbf{Z}} \bigcup_n \{X_n = a\}\right) = 1.$$

这等价于对任何  $a \in \mathbf{Z}$ , 有  $\mathbb{P}(\bigcup_n \{X_n = a\}) = 1$ . 因此推出  $\mathbb{P}(T_a < \infty) = 1$ .

## 2.2 反射原理

在本节中, 我们将用初等排列组合方法讨论对称随机游动. 简单对称的随机游动是最早被数学家关注和研究的随机现象, 因为它非常的常见, 比如两个人可以

用一个硬币开始, 正面赢一块, 反面输一块, 这样一直下去就是一个简单的随机游动, 当然硬币只是起一个随机发生器的作用, 我们可以用掷骰子, 下棋, 打球, 猜数字等各种方法代替. 把其中某个人持有的钱数按时间顺序记录下来画在黑板上, 赢一块钱向上一格, 输一块钱向下一格, 这样在黑板上就出现一条忽上忽下的轨迹, 称为一条样本轨道. 下次再赌, 又会有一条样本轨道, 所有这些可能的样本轨道是等可能出现的, 这实际上已经给我们关于简单对称随机游动的基本图景.

对称随机游动的轨道的概率性质可以用等可能的格点轨道代替, 因此我们也可以用古典概率方法来研究它. 让我们认真地把这句话表达清楚. 考虑平面上的整数格点组成的空间, 横轴表示时间, 纵轴表示空间. 一段格点轨道是指某个整数列  $(s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$  满足: 对  $m < k \leq n$ ,  $s_k - s_{k-1}$  取值为 1 或  $-1$ . 用直线将其相邻的点  $(k-1, s_{k-1})$  与  $(k, s_k)$  连接, 形成一条折线.  $n - m$  称为是轨道的长度. 当  $m = s_m = 0$  时, 称为从 0 出发长为  $n$  的一条格点轨道.

设  $s$  是一条零点出发长为  $n$  的格点轨道, 那么随机游动的从 0 到  $n$  的一段  $(X_j : 0 \leq j \leq n)$  恰好是  $s$  的概率是事件  $\xi_k = s_k - s_{k-1}, 1 \leq k \leq n$ , 发生的概率, 等于  $1/2^n$ . 用  $W_n$  表示从 0 出发长为  $n$  的格点轨道全体, 即若  $B \subset W_n$ , 它表达一个轨道性质, 那么

$$\mathbb{P}((X_j : 0 \leq j \leq n) \in B) = \frac{|B|}{2^n}.$$

换句话说, 对称随机游动的样本轨道是从 0 出发等可能出现的格点轨道. 因此, 研究对称随机游动的样本轨道的概率性质等同于研究格点轨道组成的古典概率空间的概率性质.

**练习 2.2.1** 为什么我们说随机游动样本轨道是格点轨道? 用  $W$  表示从零点出发的格点轨道全体, 严格地证明:  $\mathbb{P}(X \in W) = 1$ .

用  $N_{n,x}$  表示  $(0,0)$  到  $(n,x)$  的格点轨道总数. 显然, 存在连接  $(0,0)$  与  $(n,x)$  的格点轨道当且仅当存在  $i, j \in \mathbf{Z}_+$  使得  $n = i + j, x = i - j$ . 实际上, 只要用  $i$  和  $j$  表示格点轨道中向上和向下的折线数就可以了. 这样一条从  $(0,0)$  出发的格点轨道会经过  $(n,x)$  当且仅当它有  $i$  条向上的折线, 因此由排列的思想得

$$N_{n,x} = \binom{i+j}{i} = \binom{n}{\frac{n+x}{2}}$$

反射原理是一个关于计数的结果.

**定理 2.2.1** 设  $a, b > 0, m < n$ , 则从  $(m, a)$  到  $(n, b)$  的且碰到  $x$ -轴的格点轨道总数与从  $(m, a)$  到  $(n, -b)$  的格点轨道总数相同.

证明. 分别用  $A, B$  表示从  $(m, a)$  到  $(n, b)$  的且碰到  $x$ -轴的格点轨道全体与从  $(m, a)$  到  $(n, -b)$  的格点轨道全体. 取  $A$  的任何轨道  $(s_m, \dots, s_n)$ , 设首次碰到  $x$ -轴是在  $k$  时刻, 那么  $m < k < n$ . 将轨道  $k$  到  $n$  部分按  $x$ -轴反射得格点轨道

$$(s_m, \dots, s_k, -s_{k+1}, \dots, -s_n).$$

它是  $B$  中的格点轨道. 容易验证映射

$$(s_m, \dots, s_n) \mapsto (s_m, \dots, s_k, -s_{k+1}, \dots, -s_n)$$

建立了  $A$  到  $B$  上的一一对应. 因此结论成立.  $\square$

**练习 2.2.2** 设  $b > a > 0$ , 证明:  $(0, 0)$  到  $(n, a)$  不碰到  $y = b$  的格点轨道数为  $N_{n,a} - N_{n,2b-a}$ .

引入符号  $u_{2n} := \mathbb{P}(X_{2n} = 0)$ ,  $n \geq 0$ . 那么  $u_0 = 1$ ,

$$u_{2n} = N_{2n,0}/2^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

随机游动从零出发,  $X_0 = 0$ , 这时  $\inf\{n \geq 0 : X_n = 0\} = 0$ , 下面定义的时间

$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$$

才是首次返回零点的时间, 简称首次返回时. 我们用反射原理来计算  $T$  的分布. 显然

$$\mathbb{P}(T = 2n) = 2\mathbb{P}(X_j > 0, 1 \leq j \leq 2n, X_{2n} = 0).$$

从  $(0, 0)$  到  $(2n, 0)$  且期间都在  $x$ -轴上方的格点轨道数等于  $(1, 1)$  到  $(2n-1, 1)$  不碰到  $x$ -轴的格点轨道数, 等于总数减去其中碰到的轨道数, 按照反射原理, 等于

$$\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

因此

$$\mathbb{P}(T = 2n) = 2 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \frac{1}{2n-1} u_{2n}.$$

那么  $\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T = 2n)$ , 这个和不是很容易直接看出来, 但是可以用 Taylor 展开,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n \geq 0} u_{2n} x^n,$$

得到

$$1 - \sqrt{1-x} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+2} u_{2n} x^{n+1},$$

因此  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ . 还可以用巧妙点的方法

$$\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \left(1 - \frac{2n-1}{2n}\right) u_{2n-2} = u_{2n-2} - u_{2n}, \quad n \geq 1,$$

因此直接看出  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ .

练习 2.2.3 证明:  $\mathbb{P}(T_1 < \infty) = 1$ .

练习 2.2.4 对  $n \geq 1$ , 证明:

$$\mathbb{P}(X_1 > 0, X_2 > 0, \dots, X_{2n} > 0) = \frac{1}{2} u_{2n},$$

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, \dots, X_{2n} \geq 0) = u_{2n}.$$

由第二个等式证明  $\mathbb{P}(T = 2n) = u_{2n-2} - u_{2n}$ .

练习 2.2.5 设  $W_{2n}$  是从 0 出发时长  $2n$  的格点轨道全体, 定义  $A = \{s \in W_{2n} : s_{2n} = 0\}$ ,  $B = \{s \in W_{2n} : s_i \geq 0, 1 \leq i \leq 2n\}$ . 如下定义  $A$  到  $B$  的映射  $f$ . 取  $s \in A$ , 当  $s \in B$  时定义  $f(s) = s$ ; 当  $s \notin B$  时, 取  $(j, s_j)$  是该轨道上第一个最小值点, 显然  $s_j < 0$ . 这时将轨道  $s$  平移使得  $(j, s_j)$  为原点, 再将其原点左边段关于竖直线做反射然后平移接在右边段的终点处形成新的格点轨道  $s'$ , 则  $s' \in B$ , 定义  $f(s) = s'$ . 证明  $f$  是  $A$  到  $B$  的一一对应. (注: 该解法由 2024 春随机过程课学生杨振义提供.)

练习 2.2.6 证明:  $\mathbb{E}T = \infty$ , 也就是说平均返回时间是无限.

练习 2.2.7 用  $N_n$  表示时刻  $n$  之前随机游动返回零点的次数. 计算  $\mathbb{E}N_{2n}$ .

练习 2.2.8 反射原理还可以研究极大游程和首中时的联合分布. 取正整数  $x$ , 令

$$A_n := \max\{X_0, X_1, \dots, X_n\},$$

$$T_x := \inf\{n \geq 0 : X_n = x\},$$

分别称为  $\{X_n\}$  的极大游程与首次通过  $x$  的时间 ( $x$  的首中时). 证明:



1.  $\mathbb{P}(X_n = k, A_n \geq x) = \mathbb{P}(X_n = 2x - k).$
2.  $\mathbb{P}(A_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x) + \mathbb{P}(X_n = x + 1).$
3.  $\mathbb{P}(T_x = n) = (N_{n-1, x-1} - N_{n-1, x+1})/2^n.$

练习 2.2.9 取  $a > 0$ . 令  $S_n := \sum_{j=1}^{2n} a^{X_j}$ . 求  $\mathbb{E}(S_n^{-1} | X_{2n} = 0)$ .

练习 2.2.10 用  $L_{2n}$  表示长度为  $2n$  的格点轨道最后遇到 0 的时间, 即

$$L_{2n} := \sup\{k \leq 2n : X_k = 0\}$$

被称为 0 点的 (在时刻  $2n$  前的) 未离时, 它必是偶数. 证明:

$$\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

练习 2.2.11 求  $\frac{L_{2n}}{2n}$  依分布收敛的极限.

与上一节的方法比较, 反射原理只能用于对称的情况, 它可以得到返回时间的分布, 因此可以推出其期望是无穷.

## 2.3 首达概率公式

在本节中, 我们先推出利用首达公式然后以此来计算首次返回时分布. 设  $X = (X_n)$  是简单随机游动. 对任何非负整数  $n$  与  $k$ , 因为  $X_{n+k} - X_n = \xi_{n+1} + \cdots + \xi_{n+k}$ , 而且  $(X_j : j \leq n)$  与  $(\xi_j : j \leq n)$  生成的  $\sigma$ -代数一致, 所以有下面的结果.

**定理 2.3.1** 随机序列  $X'_k := X_{n+k} - X_n, k \geq 0$ , 是一个与  $(X_j : j \leq n)$  独立且与  $X$  同分布 (相同的随机性) 的随机游动.

设  $T$  是位置 0 的首次返回时. 令  $f_{2n} := \mathbb{P}(T = 2n)$ . 显然, 当  $X_{2n} = 0$  时,  $T \leq 2n$ . 然后当  $T = 2r$  时, 有  $X_{2r} = 0$ . 因此

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(X_{2n} = 0, T = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(X'_{2n-2r} = 0, T = 2r) = \sum_{r=1}^n f_{2r} u_{2n-2r}. \end{aligned}$$

有下面的首达概率公式, 对简单随机游动都成立.

**定理 2.3.2** 对  $n \geq 1$ ,  $u_{2n} = \sum_{r=1}^n f_{2r} \cdot u_{2n-2r}$ .

原则上, 从这个方程组可以解出  $f_{2n}$ , 但是很麻烦. 让我们采用母函数方法, 在公式两边乘  $t^{2n}$ , 对  $n$  求和

$$\sum_{n \geq 1} u_{2n} t^{2n} = \sum_{n \geq 1} \sum_{r=1}^n f_{2r} t^{2r} \cdot u_{2n-2r} t^{2n-2r} = \sum_{r \geq 1} f_{2r} t^{2r} \sum_{n \geq r} u_{2n-2r} t^{2n-2r}.$$

推出  $F(t)U(t) = U(t) - 1$ , 其中  $U(t), F(t)$  分别是  $(u_n)_{n \geq 0}, (f_n)_{n \geq 0}$  的母函数, 注意  $u_0 = 1, f_0 = 0$ . 现在由 Taylor 公式得知

$$U(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (pq)^n t^{2n} = (1 - 4pqt^2)^{-1/2}.$$

推出  $F(t) = 1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}$ . 注意  $F$  实际上是随机变量  $T$  的母函数:  $F(t) = \mathbb{E}t^T$ . 而

$$\lim_{t \in (0,1), t \uparrow 1} t^T = 1_{\{T < \infty\}},$$

由此得  $\mathbb{P}(T < \infty) = \lim_{t \uparrow 1} F(t) = 1 - |p - q|$ .

**练习 2.3.1** 下面阐述条件独立性: 设  $A, B, C$  是三个事件, 说  $B, C$  关于  $A$  条件独立, 如果当  $A$  发生时,  $B$  与  $C$  独立, 即  $\mathbb{P}(B \cap C | A) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(C | A)$ . 证明: 此等式等价于  $\mathbb{P}(B | A \cap C) = \mathbb{P}(B | A)$ .

**练习 2.3.2** 利用该方法计算  $\mathbb{P}(T_1 < \infty)$ .

**练习 2.3.3** 当  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  时, 用母函数计算  $\mathbb{E}T$ .

在第四章中, 我们会看到上面定理所说的公式可以推广到一般的马氏链.

**练习 2.3.4** 令  $\sigma_{2n}$  是 0 到  $2n$  时段正的时段数, 即

$$\sigma_{2n} := \sum_{k=1}^{2n} 1_{\{X_{k-1} \geq 0, X_k \geq 0\}},$$

称为随机游动在正半轴上的逗留时, 自然  $\sigma_{2n}$  也必是偶数. 证明:

$$\mathbb{P}(\sigma_{2n} = 2k) = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

提示: 用数学归纳法与首达概率公式.

## 2.4 差分方程

差分方程是微分方程的离散形式. 差分方程是早期研究随机游动的一个重要方法. 下面我们以输光问题为例来介绍这个方法.

输光问题是一个经典问题, 两个分别拥有赌资  $a, b$  的赌徒甲乙进行简单掷硬币赌博, 一直到一方输光为止, 问甲输光的概率. 用数学语言表达就是一个随机游动的首中时问题. 设  $X = (X_n)$  是简单随机游动, 那么  $X_n^x = X_n + x$  是从  $x$  出发的简单随机游动. 差分方程的思想来自随机游动的平移性质, 即  $x$  点出发的随机游动移动一步之后, 它到  $x+1$  或者  $x-1$ , 然后是一个从到达点出发的简单随机游动. 令  $a, b > 0$ , 求  $\mathbb{P}(T_0 < T_{a+b})$  和  $\mathbb{E}(T_0 \wedge T_{a+b})$ , 其中上面的首中时是从  $a$  出发的随机游动定义的. 对于这两个值来说, 用首中时与用进入时并无区别, 在此假设它们是进入时, 我们会看到用进入时计算比较方便. 一般地, 当  $0 \leq x \leq a+b$  时, 用  $g_x$  表示对于从  $x$  出发的随机游动, 事件  $T_0 < T_{a+b}$  发生的概率. 因为是进入时, 所以  $g_0 = 1, g_{a+b} = 0$ , 这是边界条件. 应用全概率公式, 如果  $0 < x < a+b$ , 那么随机游动再走一步时会得到下面的方程

$$g_x = pg_{x+1} + qg_{x-1}.$$

当  $p = 1/2$  时, 解出

$$g_x = 1 - \frac{x}{a+b}.$$

类似地, 令  $T = T_0 \wedge T_{a+b}$ , 它是赌博持续时间,  $E_x$  是从  $x$  出发的随机游动的时间  $T$  的期望. 这时  $E_0 = E_{a+b} = 0$  且对于  $0 < x < a+b$  有下面的方程

$$E_x = pE_{x+1} + qE_{x-1} + 1.$$

当  $p = 1/2$  时解得  $E_x = (a+b-x)x$ .

练习 2.4.1 试求解非对称情况下的差分方程.

练习 2.4.2 A, B 两人玩一个骰子赌博, 两人共有  $L$  元钱, 如果骰子是偶数, 则互不给钱, 如果骰子是 1, 则 A 给 B 一元钱, 如果骰子是 3 或 5, 则 B 给 A 一元钱. 游戏一直到一人输光结束. 用  $p_k$  表示在开始时 A 有  $k$  元钱而最后赢的概率, 写出关于  $\{p_k\}$  的差分方程并解出.

练习 2.4.3 一个粒子在  $\{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$  上作简单随机游动 ( $n \geq 1$ ), 向

右一步的概率为  $p$ , 向左一步的概率为  $q$ ,  $-N$  与  $N$  是吸收状态 (即停止移动). 设一个粒子从  $0$  点出发, 计算它在返回  $0$  前被吸收的概率.

## 2.5 随机游动的马氏性

前面几节所用的方法具有很强的局限性, 只能用于简单随机游动. 本节中将介绍 Markov 性及其应用, 该性质或者说方法可以用于研究更一般的随机序列.

概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  及其上的 i.i.d 随机序列  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ , 定义了简单随机游动  $X = (X_n)$ . 简单随机游动  $X$  的一个重要的性质是将来对于过去的依赖仅限于现在, 或者说, 在已知现在状态的条件下, 将来与过去是独立的. 这个性质是俄罗斯数学家在 1900 年左右提出的, 所以称为 Markov 性, 或者马氏性.

这个性质在首达概率公式的证明中使用. 确切地说, 对于任何的  $k$ , 给定  $X_k = x$ , 将来的运动  $(X_n, n \geq k)$  是一个从  $x$  出发的简单随机游动且与过去  $X_1, \dots, X_k$  独立. 通常我们把  $k$  当作现在, 那么马氏性说给定现在的位置, 将来与过去是独立的.

对  $x \in \mathbf{Z}$ , 令  $X_n^x = x + X_n$ .  $\{X_n^x\}$  称为从  $x$  出发的简单随机游动, 它向右移动一个单位的概率是  $p$ , 而向左移动一个单位的概率是  $q$ . 当  $p > q$  时, 说它偏向右的, 反之偏向左的.  $p = q$  即是前面讨论过的对称随机游动. 现在我们看到, 在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  下, 我们有一族随机序列  $\{(X_n^x : n \geq 0) : x \in \mathbf{Z}\}$  描述不同点出发相同转移规律的随机游动.

为了叙述方便, 下面我们介绍另外的一套描述随机游动的系统, 简单地说, 我们将随机游动  $(X_n^x)$  映射到轨道空间上去, 变成轨道空间上依赖于  $x$  的分布  $\mathbb{P}^x$ . 然后只需要关注坐标过程. 也就是说, 坐标过程  $Z$  在概率测度  $\mathbb{P}^x$  下相当于  $x$  出发的随机游动. 两种体系在概率意义上没有区别, 而后一种有时更方便.

应该说这种做法在生活中也是经常的. 比如为了表示速度, 可以固定距离说一公里走二十分钟, 也可以说一小时走三公里, 也就是说可以约定距离用时间表示速度, 也可以约定时间用距离表示速度, 速度有多种表示方式, 甚至可以说两小时走六公里. 再举个例子, 在美国, 当问到汽车的油耗时, 人们经常简单地回答三十英里, 这是说 30 miles/gallon, 而在中国对同样的问题, 人们常回答说八升, 这是说 8 升/百公里.

回忆随机过程的分布, 现在  $E$  是整数集,  $T$  是非负整数集,  $E^T$  是轨道空间, 对  $w \in E^T$ , 定义坐标过程  $Z_n(w) := w(n)$ ,  $n \geq 0$ .  $\mathcal{E}^T$  表示  $E^T$  上使得所有的  $Z_n$ ,  $n \geq$

0 都成为随机变量的最小事件域. 现在, 从  $x$  出发的随机游动  $(X_n^x)$  在轨道空间  $(E^T, \mathcal{E}^T)$  上的分布用  $\mathbb{P}^x$  表示. 确切地说, 坐标过程  $(Z_n)$  在概率  $\mathbb{P}^x$  下与  $(X_n^x)$  在概率  $\mathbb{P}$  下同分布. 特别地  $\{Z_n\}$  在  $\mathbb{P}^x$  下的有限维分布与  $\{X_n^x\}$  在  $\mathbb{P}$  下的有限维分布一致, 即对任何  $n \geq 0, x_0, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$ , 有

$$\mathbb{P}^x(Z_i = x_i : 0 \leq i \leq n) = \mathbb{P}(X_i^x = x_i : 0 \leq i \leq n).$$

显然, 从  $x$  出发一步到达  $y$  的概率  $\mathbb{P}^x(Z_1 = y) = \mathbb{P}(X_1 + x = y) = p(y - x)$ . 记  $p(x, y) := p(y - x)$ ,  $x, y \in \mathbf{Z}$ . 那么我们可以确切地写出有限维分布.

**引理 2.5.1** 对任何  $n \geq 0, x_0, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$ , 有

$$\mathbb{P}^x(Z_i = x_i : 0 \leq i \leq n) = 1_{\{x=x_0\}} p(x, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n).$$

证明. 直接地计算

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(Z_i = x_i : 0 \leq i \leq n) &= \mathbb{P}(X_i^x = x_i : 0 \leq i \leq n) \\ &= 1_{\{x=x_0\}} \mathbb{P}(X_i = x_i - x : 1 \leq i \leq n) \\ &= 1_{\{x=x_0\}} \mathbb{P}(\xi_1 = x_1 - x, \xi_2 = x_2 - x_1, \dots, \xi_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= 1_{\{x=x_0\}} \mathbb{P}(\xi_1 = x_1 - x) \mathbb{P}(\xi_2 = x_2 - x_1) \cdots \mathbb{P}(\xi_n = x_n - x_{n-1}) \\ &= 1_{\{x=x_0\}} p(x, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

完成证明. □

注意, 因为  $\mathbb{P}^x(Z_0 = x) = 1$ , 所以上式等价于

$$\mathbb{P}^x(Z_i = x_i : 1 \leq i \leq n) = p(x, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n).$$

**练习 2.5.1** 用  $W_x$  表示从  $x$  出发的格点轨道集. 证明:  $\mathbb{P}^x(W_x) = 1$ , 即  $\mathbb{P}^x$  支撑在格点轨道集上.

在这一节中以及以后, 我们使用新的符号系统, 不妨假设  $\Omega$  与  $(X_n)$  是前面所说的轨道空间  $E^T$  和坐标过程  $(Z_n)$ , 确切地说, 每个  $\omega \in \Omega$  是一个轨道  $\omega = (\omega(n), n \geq 0)$ , 且  $X_n(\omega) = \omega(n)$ . 另外  $\mathcal{F} = \sigma(\{X_n : n \geq 0\})$ . 上面有一族概率  $\mathbb{P}^x, x \in \mathbf{Z}$ , 使得  $(X_n)$  在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^x)$  上是一个从  $x$  出发的简单随机游动, 即与前面所说的  $(X_n^x)$  同分布. 另外, 用  $\mathbb{E}^x$  表示  $\mathbb{P}^x$  对应的期望. 现在我们来重新认识马氏性, 目的是使得它可以推广到一般的马氏链, 还可以用来得到我们想要的结果.

由引理 2.5.1, 我们有有限维分布

$$\mathbb{P}^x(X_i = x_i : 0 \leq i \leq n) = 1_{\{x=x_0\}} p(x, x_1) p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n).$$

等价于下面等式:

$$\mathbb{P}^x(X_{n+1} = y | X_i = x_i, 0 \leq i \leq n) = p(x_n, y) = \mathbb{P}^{x_n}(X_1 = y). \quad (M1)$$

这称为马氏性, 即将来  $X_{n+1}$  对于过去  $X_i = x_i, 0 \leq i \leq n$  的依赖仅限于现在  $x_n$ .

练习 2.5.2 在一般概率空间上, 设  $A, B, C$  是三个事件. 证明:

$$\mathbb{P}(B \cap C | A) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(C | A)$$

等价于  $\mathbb{P}(B | A \cap C) = \mathbb{P}(B | A)$ . 这个等式称为  $B, C$  关于  $A$  条件独立.

练习 2.5.3 证明:  $\mathbb{P}^x(X_{n+1} = y | X_i = x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathbb{P}^x(X_{n+1} = y | X_n = x_n)$ . 这就是马氏性: 将来  $X_{n+1}$  的位置与过去  $X_0, \dots, X_{n-1}$  关于现在  $X_n = x_n$  条件独立.

让我们学习用条件期望的方法来表示马氏性, 用  $\mathcal{F}_n$  表示随机变量  $(X_0, \dots, X_n)$  生成的事件域, 那么  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ . 注意  $\mathcal{F}_n$  是离散事件域, 随机变量关于  $\mathcal{F}_n$  可测是指它依赖于过去 (时间  $n$  之前). 如此定义的事件域序列  $(\mathcal{F}_n)$  称为是由随机序列  $(X_n)$  生成的自然流. 这是随机过程的一个重要概念.

引理 2.5.2 对任何  $n \geq 0, x, y \in \mathbf{Z}$ , 有

$$\mathbb{P}^x(X_{n+1} = y | \mathcal{F}_n) = p(X_n, y) = \mathbb{P}^{X_n}(X_1 = y). \quad (M2)$$

注意右边  $\mathbb{P}^{X_n}(X_1 = y)$  是将随机变量  $X_n$  代入  $\mathbb{P}^x(X_1 = y)$  中的  $x$ , 后面类似的记号类似理解.

证明. 对任何  $x_0, \dots, x_n \in \mathbf{Z}$ , 如果事件  $\{X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0\}$  的概率不等于 0, 那么它是  $\mathcal{F}_n$  的原子. 由 (M1) 与定理 2.3.1[6] 推出 (M2) 成立.  $\square$

现在引入推移算子, 对任何  $k \geq 0, \omega \in \Omega, (\omega(k+n), n \geq 0)$  也是一个轨道, 记为  $\theta_k \omega$ , 它满足  $X_n \circ \theta_k = X_{k+n}, n \geq 0$ . 所以我们说推移  $\theta_k$  相当于 “从  $k$  时刻开始看”. 显然  $\theta_k$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  到自身的可测映射.

用推移算子的语言, (M2) 可以写成为

$$\mathbb{E}^x(1_{\{X_1=y\}} \circ \theta_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}^{X_n}(X_1 = y).$$

更一般地有下面的定理.

**定理 2.5.1** 对任意  $n \geq 0, x \in \mathbf{Z}$  与  $\mathcal{F}$  可测的有界 (或者非负) 随机变量  $Y$ , 有

$$\mathbb{E}^x(Y \circ \theta_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^{X_n}(Y). \quad (\text{M3})$$

证明. 因为  $\mathbb{E}^{X_n}(Y)$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的随机变量, 故由定义只需验证对任何原子  $A \in \mathcal{F}_n$ , 即  $A = \{X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n\}$  有

$$\mathbb{E}^x(Y \circ \theta_n; A) = \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X_n}(Y); A) \quad (2.5.1)$$

由单调类方法, 我们只需证明它对示性函数  $Y = 1_B$  成立就够了, 其中  $B = \{X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m\}$ , 因为这样的  $B$  的全体是个  $\pi$ -类且生成  $\mathcal{F}$ . 事实上, 由引理 2.5.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x(1_B \circ \theta_n; A) &= \mathbb{P}^x(X_0 = y_0, \dots, X_n = y_n, X_n = x_0, X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+m} = x_m) \\ &= 1_{\{x=y_0\}} p(y_0, y_1) \cdots p(y_{n-1}, y_n) 1_{\{x_0=y_n\}} p(x_0, x_1) \cdots p(x_{m-1}, x_m) \\ &= 1_{\{x=y_0\}} p(y_0, y_1) \cdots p(y_{n-1}, y_n) \mathbb{P}^{y_n}(B) = \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_n}(B); A). \end{aligned}$$

这样因为  $\mathcal{F}_n$  是离散的且由上面形式的  $A$  的全体生成, 故 (2.5.1) 对  $Y = 1_B$ , 其中  $B$  是上面的形式, 与任何  $A \in \mathcal{F}_n$  成立.  $\square$

**练习 2.5.4** 设随机序列  $(X_n)$  满足: 对于任何的  $k$ , 随机序列  $\xi_n := X_{n+k} - X_k$ ,  $n \geq 0$ , 与  $X_1, \dots, X_k$  独立. 这时  $(X_n)$  称为独立增量过程 (或序列). 证明:  $\mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(Y | X_k)$ , 其中  $Y$  是关于将来事件域  $\sigma(X_n : n > k)$  可测的非负或者有界随机变量.

## 2.6 停时与强马氏性

继续上一节, 本节将介绍强马氏性, 强马氏性是指上一节的马氏性对于一类随机时间也成立. 随机时间是一个实际生活中常见的概念, 前面所说的首中时就是随机时间. 这里我们引入更一般的随机时间.

**定义 2.6.1** 取值在  $\mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$  的 (广义) 随机变量称为是停时, 如果对任何  $n \geq 0$ , 有  $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . 然后定义

$$\mathcal{F}_T := \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, n \geq 0\}.$$

停时的定义看上去抽象, 实际上随着对流  $(\mathcal{F}_n)$  的认识, 我们会逐渐感受到其直观意义.

引理 2.6.1  $\mathcal{F}_T$  也是一个事件域.

引理与下面事实的验证是简单的, 留作习题. (停时的详细讨论可见第四章.)

练习 2.6.1 验证以上引理及下面的事实.

1. 当  $T$  是一个固定时间  $n$  时,  $T$  是停时且  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_n$ .
2. 设  $T, S$  是停时, 那么  $T \wedge S$  也是.
3. 设  $T, S$  是停时且  $S \leq T$ , 那么  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .

练习 2.6.2 验证:

1. 在  $T$  是停时的定义与  $\mathcal{F}_T$  的定义中把  $\{T \leq n\}$  改为  $\{T = n\}$  是一样的.
2. 停时  $T$  是  $\mathcal{F}_T$  可测的.
3. 对  $y \in \mathbf{Z}$ , 其进入时与首中时是停时.
4. 随机变量  $Y$  是  $\mathcal{F}_T$  可测的当且仅当对任何  $n$ ,  $Y1_{\{T=n\}}$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的.

练习 2.6.3 思考: 设  $T$  是停时, 是否  $\mathcal{F}_T = \sigma(X_{n \wedge T} : n \geq 0)$ ?

在事件  $\{T = n\}$  上定义  $X_T := X_n$ . 注意  $X_T$  只在  $\{T < \infty\}$  上定义, 它是随机游动在停时  $T$  时刻的位置. 我们说样本空间上的函数  $X$  在事件  $A$  上是  $\mathcal{F}$  随机变量, 是指对任何  $x \in \mathbf{R}$ ,  $\{X \leq x\} \cap A \in \mathcal{F}$ .

引理 2.6.2 设  $T$  是停时, 则  $X_T$  在  $\{T < \infty\}$  上是关于  $\mathcal{F}_T$  可测的.

证明. 对  $y \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 0$ , 有  $\{X_T = y\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k \leq n} \{X_k = y, T = k\} \in \mathcal{F}_n$ . 由定义, 这证明了可测性.  $\square$

再定义停时的推移, 当  $T = n$  时定义  $\theta_T = \theta_n$ . 同样  $\theta_T$  也是当  $T < \infty$  时才有意义, 它是  $(\Omega, \mathcal{F})$  到自身的随机映射, 事实上, 对  $B = \{X_n = x\}$ ,  $\{\theta_T \in B\} \cap \{T < \infty\} = \bigcup_k \{X_n \circ \theta_k = x\} \cap \{T = k\} = \bigcup_k \{X_{n+k} = x\} \cap \{T = k\} \in \mathcal{F}$ .

本节下面分别用  $T_y, \tau_y$  表示  $y$  点的首中时与进入时. 再次强调进入时与首中时只有当该点恰好是出发点时才有区别, 且它们都是停时.

下面的结果后面会经常应用.



引理 2.6.3 对任何  $n$  有

$$\tau_y \circ \theta_n + n = \inf\{k \geq n : X_k \circ \theta_n = y\}.$$

因此在事件  $\{\tau_y \geq n\}$  上有  $\tau_y = \tau_y \circ \theta_n + n$ . 首中时类似, 只需将  $\geq$  改为  $>$ .

按照定义有

$$\begin{aligned} \tau_y \circ \theta_n &= \inf\{k \geq 0 : X_k \circ \theta_n = y\} \\ &= \inf\{k \geq 0 : X_{k+n} = y\} = \inf\{k \geq n : X_k = y\} - n. \end{aligned}$$

练习 2.6.4 设  $T, S$  是停时, 证明: (1)  $S \circ \theta_T + T$  也是停时. (2)  $X_{S \circ \theta_T} = X_{S \circ \theta_{T+T}}$ .

下面定理是关于停时的马氏性, 称为强马氏性.

定理 2.6.1 设  $T$  是停时,  $Y$  是非负随机变量, 那么在  $\{T < \infty\}$  上有

$$\mathbb{E}^x(Y \circ \theta_T | \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}^{X_T}(Y),$$

即对任何  $A \in \mathcal{F}_T$  有

$$\mathbb{E}^x(Y \circ \theta_T; A, T < \infty) = \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X_T}(Y); A, T < \infty). \quad (M4)$$

证明. 类似上面定理的证明, 我们只需对  $Y = 1_B$ ,  $B \in \mathcal{F}$  验证 (M4) 成立就足够了.

利用 (M3), 因为  $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ , 故

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x(1_B \circ \theta_T; A, T < \infty) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}^x(1_B \circ \theta_T; A \cap \{T = n\}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}^x(1_B \circ \theta_n; A \cap \{T = n\}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_n}(B); A \cap \{T = n\}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_T}(B); A \cap \{T = n\}) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_T}(B); A, T < \infty). \end{aligned}$$

完成了证明. □

## 2.7 马氏性的应用

现在我们用新符号体系重新证明首达概率公式, 即定理 2.3.2. 因为  $\{T = 2r\} \in \mathcal{F}_{2r}$ , 所以由马氏性定理 2.5.1 得

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \mathbb{P}^0(X_{2n} = 0) = \sum_{r=1}^n \mathbb{P}^0(X_{2n} = 0, T = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}^0(X_{2n-2r} \circ \theta_{2r} = 0, T = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^n \mathbb{E}^0(\mathbb{P}^{X_{2r}}(X_{2n-2r} = 0), T = 2r) = \sum_{r=1}^n f_{2r} u_{2n-2r}. \end{aligned}$$

随机游动有一个重要的性质, 空间的平移不变性, 或空间齐性: 从  $x$  出发轨道落在一个集合  $B$  内的概率等于从  $x+y$  出发轨道落在  $B+y$  内的概率, 这是因为  $p(x, y)$  有平移不变性:  $p(x+z, y+z) = p(x, y)$ ,  $x, y, z \in \mathbf{Z}$ . 这推出从  $x$  出发的随机游动首次访问  $y$  的时刻  $T_y$  (或者  $\tau_y$ ) 与从 0 出发的随机游动首次访问  $y-x$  的时刻  $T_{y-x}$  (或者  $\tau_{y-x}$ ) 是同分布的. 这其实是非常直观的事实, 下面的练习是一个严格的证明.

**练习 2.7.1** 对任何  $x \in \mathbf{Z}$ , 定义平移算子  $\gamma_x(\omega) := \omega + x$ ,  $\omega \in \Omega$ , 右边  $x$  表示恒等于  $x$  的轨道.

1. 证明:  $T_y \circ \gamma_x = T_{y-x}$ ,  $x, y \in \mathbf{Z}$ .
2. 空间平移不变性: 对  $x \in \mathbf{Z}$ , 有  $\mathbb{P}^0 \circ \gamma_x^{-1} = \mathbb{P}^x$ .
3.  $\mathbb{P}^x(T_y = n) = \mathbb{P}^0(T_{y-x} = n)$ .

我们将应用随机游动的强马氏性来计算首中时的母函数. 在实际计算时, 我们从进入时开始. 对任何  $x, y \in \mathbf{Z}$ , 令  $\phi_{x,y}$  是  $\tau_y$  在概率  $\mathbb{P}^x$  下的母函数

$$\phi_{x,y}(t) := \mathbb{E}^x t^{\tau_y}.$$

注意当  $x \neq y$  时,  $\mathbb{P}^x(T_y = \tau_y) = 1$ . 由空间平移不变性

$$\begin{aligned} \phi_{x,y}(t) &= \mathbb{E}^x t^{\tau_y} = \mathbb{E}^0 t^{\tau_{y-x}} = \phi_{0,y-x}(t) \\ \phi_{x,x}(t) &= \phi_{0,0}(t) = \mathbb{E}^0 t^{\tau_0} = 1. \end{aligned}$$

设  $x > 0$ , 因为随机游动每次移动一个单位, 故从 0 出发时通过  $x$  必须先通过 1, 即  $\tau_x \geq \tau_1$ , 这时  $\tau_x = \tau_x \circ \theta_{\tau_1} + \tau_1$ , 注意这个等式对于  $T_x$  不成立. 因此由强马氏性,

$$\begin{aligned}\phi_{0,x}(t) &= \mathbb{E}^0 t^{\tau_x} = \mathbb{E}^0(t^{\tau_1 + \tau_x \circ \theta_{\tau_1}}) \\ &= \mathbb{E}^0 t^{\tau_1} \cdot t^{\tau_x \circ \theta_{\tau_1}} = \mathbb{E}^0(t^{\tau_1} \mathbb{E}^{X_{\tau_1}} t^{\tau_x}) \\ &= \mathbb{E}^0 t^{\tau_1} \cdot \mathbb{E}^1 t^{\tau_x} = \phi_{0,1}(t) \cdot \phi_{1,x}(t).\end{aligned}$$

记  $\phi := \phi_{0,1}$ , 那么  $\phi_{0,x} = \phi^x$ .

另一方面, 从 0 出发也必有  $\tau_x \geq 1$ , 这时  $\tau_x = \tau_x \circ \theta_1 + 1$ , 注意该等式对  $T_x$  不成立. 由马氏性

$$\begin{aligned}\phi_{0,x}(t) &= \mathbb{E}^0 t^{\tau_x} = \mathbb{E}^0(t^{1 + \tau_x \circ \theta_1}) = t \mathbb{E}^0(\mathbb{E}^{X_1} t^{\tau_x}) \\ &= t(\mathbb{E}^1 t^{\tau_x} \cdot p + \mathbb{E}^{-1} t^{\tau_x} \cdot q) = tp\phi_{0,x-1}(t) + tq\phi_{0,x+1}(t).\end{aligned}$$

令  $x = 1$ , 我们得

$$\phi(t) = tp + tq\phi(t)^2,$$

因  $\phi(t) \leq 1$ , 故解得

$$\phi(t) = \mathbb{E}^0 t^{\tau_1} = \mathbb{E}^0 t^{T_1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2tq}.$$

由对偶性得

$$\phi_{0,-1}(t) = \mathbb{E}^0 t^{\tau_{-1}} = \mathbb{E}^0 t^{T_{-1}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2tp}.$$

由此推出, 0 点出发在有限步内到达 1 的概率为

$$\mathbb{P}^0(\tau_1 < +\infty) = \phi(1-) = \frac{1 - |p - q|}{2q} = \begin{cases} 1, & p \geq q; \\ \frac{p}{q}, & p < q. \end{cases}$$

即当随机移动偏向右时, 它必定在有限时间内到达 1. 这时计算其期望值  $h$

$$\mathbb{E}^0 \tau_1 = \phi'(1-) = \begin{cases} +\infty, & p = q; \\ \frac{1}{p-q}, & p > q. \end{cases}$$

最后, 我们需要计算 0 出发随机游动首次返回时  $T$  的母函数. 因为在概率  $\mathbb{P}^0$  之下有  $T \geq 2 > 1$ , 故  $T = 1 + T \circ \theta_1$ , 再由马氏性,

$$\mathbb{E}^0 t^T = \mathbb{E}^0 t^{1 + T \circ \theta_1} = t \mathbb{E}^0 t^{T \circ \theta_1}$$

$$\begin{aligned}
&= t\mathbb{E}^0(\mathbb{E}^{X_1}t^T) = tp\mathbb{E}^1t^T + tq\mathbb{E}^{-1}t^T \\
&= tp\phi_{0,-1}(t) + tq\phi_{0,1}(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t^2pq}.
\end{aligned}$$

因此零点出发在有限步内返回 0 的概率

$$\mathbb{P}^0(T < \infty) = \lim_{t \downarrow 1, t \uparrow 1} \mathbb{E}^0t^T = 1 - |p - q|.$$

注意只有在对称简单随机游动时, 此概率为 1.

**练习 2.7.2** 当  $p < q$  时, 定义  $\xi = \sup_n X_n$ . 证明  $\mathbb{P}^0(\xi < \infty) = 1$ , 并求  $\xi$  的分布.

## 第三章 鞅及其应用

鞅是在二十世纪初引入的, Lévy 在 1934 年的工作提出了鞅这个概念, 但没有命名, John Ville 在 1939 年引入了鞅这个名字, 但 20 世纪 50 年代 Doob 的工作给了鞅真正的生命力, 现在鞅是随机分析中的中心内容和不可缺少的工具. 在这一章中, 我们将简单介绍鞅的概念, 鞅基本定理及其在随机游动与金融定价理论中的应用.

鞅的英文是 martingale, 原意是马拉车时用的器具, 但是在法国, 它有新的意思, 有人说这指的是 18 世纪赌博中流行的一种 ‘必赢’ 策略或者叫倍增策略: 在一个掷硬币的简单赌博中, 输了加倍, 赢了即止. 这样的策略保证赌徒在赢的时候会赢回之前所有输掉的赌资, 且赢得最初的赌本; 也有人说这是 19 世纪法国一个赌徒的名字 John Henry Martingale. 具体是怎么来的也没有定论. 后来, 在数学中, 鞅是所谓公平游戏 (赌博) 的模型, 即基于过去的结果, 下一步赢得的期望为零. 因此鞅是用条件期望来定义的随机过程. Doob 利用鞅这个模型来研究是否存在必赢策略的问题, 从而发展出鞅论.

### 3.1 鞅与鞅基本定理

在随机过程理论中, 鞅是一个陌生的词, 直观地讲, 鞅是公平游戏的代名词. 拿随机游动为例, 设  $\{\xi_n\}$  是独立同分布随机序列, 分布为  $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p$ ,  $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - p$ . 可以理解为简单的博弈游戏. 令  $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ , 为  $n$  局游戏中总的输赢数. 显然当  $p = 1/2$  时, 游戏是公平的. 这时对任何  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n, \dots, X_1) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}|X_n, \dots, X_1) + X_n = X_n,$$

也就是说, 无论前  $n$  局游戏的结果如何, 我们对下一局输赢的期望是 0.

一般地, 设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  是一个概率空间, 也可以是负整数集.  $\{X_n : n \geq 0\}$  是随机序列. 简单地说, 如果对任何  $n$ ,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | X_k, k \leq n) = X_n,$$

那么我们说  $(X_n)$  是鞅. 另外  $\geq$  号成立时, 称为下鞅,  $\leq$  号成立时, 称为上鞅. 对任何  $n \in I$ , 定义  $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_i : i \leq n\})$ , 是时间  $n$  前的随机变量所生成的  $\sigma$ -域, 当然  $\mathcal{F}_n$  关于  $n$  是递增的, 集合  $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$  被称为是随机序列  $(X_n)$  自然流. 鞅的定义实际上是  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ .

为了方便, 我们从流出发定义鞅. 上面随机序列  $(X_n)$  所定义的自然流  $(\mathcal{F}_n)$  是一个递增的  $\sigma$ -代数列. 它代表一个逐步增加的信息流. 一般地, 一个递增的  $\mathcal{F}$  的子  $\sigma$ -代数列  $(\mathcal{G}_n)$  称为流. 如果对任何  $n$ ,  $X_n$  关于  $\mathcal{F}_n$  可测, 那么我们说随机序列  $(X_n)$  关于流  $(\mathcal{G}_n)$  适应, 或  $(\mathcal{G}_n)$  是  $(X_n)$  的适应流. 显然随机序列关于其自然流适应.

**定义 3.1.1** 给定一个流  $(\mathcal{G}_n)$ , 如果可积随机序列  $(X_n)$  关于  $(\mathcal{G}_n)$  适应, 且对任何  $n$  有  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = X_n$ , 那么称  $(X_n)$  是关于流  $(\mathcal{G}_n)$  的鞅.

上面说随机序列是鞅的定义可以理解为关于自然流是鞅. 有时候, 流  $(\mathcal{G}_n)$  是不言自明的, 可以省略. 另外, 上面的定义中没有专门标注时间集, 一般地时间集  $T$  是非负整数集, 但可以是整数集的一个连续整数 (至少有两个) 子集, 例如  $T = (a, b) \cap \mathbb{Z}$ . 在后面还讨论了时间集是负整数集的鞅. 一般地, 一个从左到右排列的随机序列 (有限或者无限)

$$\cdots, \cdots, X, Y, Z, \cdots,$$

称为鞅, 如果其中任何一个随机变量关于其左边所有随机变量的条件期望等于其左边邻居.

**练习 3.1.1** 设  $(X_n)$  是鞅, 证明: (1) 对任何  $m > n$ ,  $\mathbb{E}(X_m | \mathcal{G}_n) = X_n$ ; (2)  $(|X_n|)$  与  $(X_n^2)$  是下鞅.

**练习 3.1.2** 设  $X, Y$  是独立可积随机变量,  $\mathbb{E}Y = 0$ . 证明: (1)  $X, X + Y$  是鞅. 这里是指它们按此顺序排列是鞅. (2)  $\mathbb{E}|X + Y| \geq \mathbb{E}|X|$ .

**例 3.1.1** 独立随机序列诱导的鞅: 设  $\{\xi_n\}$  是可积的独立随机序列, 且  $\mathbb{E}\xi_n = 0$ ,  $(\mathcal{F}_n)$  是其自然流, 则部分和序列  $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n, n \geq 1$  是鞅. 如果  $\xi_n$  非负或有界, 且  $\mathbb{E}\xi_n = 1$ , 则积序列  $X_n = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n, n \geq 1$  是鞅. ■

例 3.1.2 设  $\{X_n\}$  是简单随机游动, 自然流  $\{\mathcal{F}_n\}$ , 对  $\lambda > 0$ , 因  $X_n$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的, 故

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}^x(\lambda^{X_n+\xi_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = \lambda^{X_n} \cdot \mathbb{E}^x(\lambda^{\xi_{n+1}}) \\ &= \lambda^{X_n} \cdot (\lambda p + \frac{q}{\lambda}).\end{aligned}$$

因此  $\{\lambda^{X_n}(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n}\}$  是鞅, 称为 (随机游动的) 指数鞅. 当  $p \neq q$  时, 取  $\lambda = \frac{q}{p}$ ,  $\lambda p + \frac{q}{\lambda} = 1$ , 因此  $\{(\frac{q}{p})^{X_n}\}$  是鞅. ■

练习 3.1.3 一个袋子中在时刻 0 有一个红球与一个白球. 随机地从袋子中取一个球, 然后将它放回并放入一个相同颜色的球, 无限地重复此过程. 记  $X_n$  为  $n$  次后袋中白球数与总球数之比. 证明:  $\{X_n\}$  是鞅.

练习 3.1.4 证明: 如果  $(X_n)$  关于某个适应流是鞅, 那么它关于自然流是鞅.

练习 3.1.5 设  $\{X_n : n \geq 0\}$  是  $(\mathcal{F}_n)$  适应的可积随机序列, 满足

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \alpha X_n + \beta X_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

其中  $\alpha > 0, \beta > 0$ . 问  $\alpha, \beta, c$  满足什么条件时, 序列  $Y_n := cX_n + X_{n-1}, n \geq 1$  是鞅?

例 3.1.3 (Doob 鞅) 设  $\xi$  是  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上可积随机变量,  $\{\mathcal{G}_n : n \in I\}$  是任意一个流. 令  $X_n := \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G}_n)$ , 那么  $\{X_n\}$  是鞅. ■

练习 3.1.6 称随机序列  $(X_n)$  是正交增量序列, 如果对任何  $k < m < n$ ,  $X_n - X_m$  与  $X_m - X_k$  是不相关的. 证明: 鞅是正交增量序列.

从定义和例子可以看出, 鞅弱于期望为零的独立随机序列和, 但又强于正交增量序列, 不难验证鞅的全体 (相对于固定的流) 是一个线性空间. 下面我们证明鞅经过某种具有实际背景的运算之后仍然是鞅, 称为鞅基本定理.

设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  是概率空间,  $(\mathcal{G}_n : n \in I)$  是流, 下面谈到适应或者鞅时, 都是关于这个流而言的. 一个随机序列  $\{H_n : n \geq 0\}$  称为是可预料的, 如果  $H_0$  是  $\mathcal{G}_0$  可测的且对任何  $n \geq 0$ ,  $H_{n+1}$  是  $\mathcal{G}_n$  可测的. 设  $X$  是适应过程,  $H_n$  是可预料过程, 定义

$$(H \bullet X)_0 := H_0 X_0,$$

$$(H \bullet X)_{n+1} := (H \bullet X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n), \quad n \geq 0.$$

称为是过程  $H$  关于  $X$  的随机积分, 它是一般随机积分的离散形式. (为了在符号上区别乘积与随机积分, 除非必需, 我们写乘积时一般不用点.)

**定理 3.1.1** 设  $X$  是一个适应过程,  $H$  是可预料有界过程. 如果  $X$  是鞅, 那么过程  $H \bullet X$  是鞅. 如果  $X$  是下鞅且  $H$  非负, 那么  $H \bullet X$  是下鞅.

证明. 显然  $(H \bullet X)_n$  是可积的并且  $\mathcal{G}_n$  可测的, 且对  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(H \bullet X)_{n+1} - (H \bullet X)_n | \mathcal{G}_n] &= \mathbb{E}(H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{G}_n) \\ &= H_{n+1} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{G}_n),\end{aligned}$$

如果  $X$  是鞅, 则右边是零, 即  $H \bullet X$  是鞅; 如果  $X$  是下鞅且  $H$  非负, 则右边也非负, 即  $H \bullet X$  是下鞅.  $\square$

可以看出, 证明的关键是  $X_{n+1} - X_n$  前的乘子是关于  $\mathcal{G}_n$  可测的. 鞅基本定理是随机分析中非常本质的结果, 千百年来, 赌徒们总是想在赌桌上发现对自己有利的策略, 经验说明这是徒劳的. 以上定理从理论上满意地解释了这个经验, 也再次诠释了 [6] 第 30 页中所引用的 Feller 的话. 设  $X_n$  是第  $n$  次赌博后某赌徒  $A$  的所有赌资, 则  $X_{n+1} - X_n$  是  $A$  第  $n+1$  次赌博中输赢的数目, 另一个赌徒  $B$  赌  $A$  的运气,  $H_{n+1}$  是乘子, 也就是  $B$  的策略. 但  $B$  也不可能预知下一局  $A$  的输赢,  $H_{n+1}$  只能根据前  $n$  局  $X_0, X_1, \dots, X_n$  的结果决定, 即  $H_{n+1}$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的, (从这个意义解释, 可预料也许应称为不可预料.) 定理指出  $B$  的运气不可能比  $A$  更好, 也不可能更坏.

鞅基本定理虽然简单, 但很应用. 下面几节就讲述它的几个应用.

## 3.2 鞅的应用: Doob 停止定理

Doob(有界) 停止定理是鞅基本定理的简单推论, 用来计算随机游动的首中时的分布, 可与前面所说的马氏性方法媲美. 在某个时间停止赌博是一种简单策略. 让我们引入停时的概念, 它是概率论中最重要的概念之一.

**定义 3.2.1** 一个值域为  $I$  的随机变量  $T$  称为是 (相对于流  $(\mathcal{G}_n : n \in I)$  的) 停时, 如果对任何  $n \in I$ ,  $\{T = n\} \in \mathcal{G}_n$ .

典型的停时是首中时, 如果  $A$  是 Borel 集, 定义  $T$  是序列  $\{X_n : n \in I\}$  首次遇到  $A$  的时间, 即  $T := \inf\{n \in I : X_n \in A\}$ , 那么  $T$  是停时, 理由是

$$\{T = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{X_{n-1} \notin A\} \cap \dots \cap \{X_0 \notin A\} \in \mathcal{G}_n.$$



因为  $\mathcal{G}_n$  关于  $n$  递增, 故  $T$  是停时等价于对任何  $n \in I$ ,  $\{T \leq n\} \in \mathcal{G}_n$ . 如果  $T$  与  $S$  是停时, 那么  $\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}$ , 故有下面引理.

**引理 3.2.1** 如果  $T$  与  $S$  是停时, 那么  $T \wedge S$  与  $T \vee S$  也是停时.

对于随机序列  $\{X_n : n \in I\}$ , 自然地在集合  $\{T = n\}$  上定义  $X_T := X_n$ ,  $n \in I$ , 被称为  $X$  在停时  $T$  处的位置. 记  $X_n^T := X_{n \wedge T}$ ,  $n \in I$ , 称为序列  $X = (X_n)$  的  $T$ -停止序列, 可以写为

$$X_{n+1}^T - X_n^T = (X_{n+1} - X_n)1_{\{T > n\}}.$$

而  $\{T > n\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{G}_n$ , 应用定理 3.1.1 得到下面的定理.

**定理 3.2.1 (Doob)** (1) 如果  $(X_n)$  是鞅,  $T$  是停时, 那么它的停止序列  $(X_{n \wedge T})$  也是鞅. 若  $T$  有界, 则  $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ . (2) 设  $X$  是下鞅,  $S, T$  是停时且  $S \leq T$ , 则  $(X_{T \wedge n} - X_{S \wedge n})$  是下鞅. 因此若  $T$  有界, 则  $\mathbb{E}X_S \leq \mathbb{E}X_T$ .

证明. 只需证明 (2). 由上面  $X_n^T$  的表达式, 结合条件  $S \leq T$  得

$$(X_{n+1}^T - X_{n+1}^S) - (X_n^T - X_n^S) = 1_{\{T > n\} \setminus \{S > n\}}(X_{n+1} - X_n).$$

然后由定理 3.1.1 推出结论. □

**练习 3.2.1** 证明: 如果对任何有界停时  $T$  有  $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ , 则  $(X_n)$  是鞅.

定理中的结论通常称为 Doob (有界) 停止定理, 是非常有用的. 它直观上是说一个公平游戏若在有限时间 (有界时间) 内结束则肯定是公平的. 首先举个例子说明, 定理结论对于一般停时不成立.

**例 3.2.1** 设  $\{X_n : n \geq 0\}$  是直线上 0 出发的简单对称随机游动, 它是鞅. 定义  $T$  是点 100 的首中时, 那么  $T < \infty$  且  $X_T = 100$ , 所以  $\mathbb{E}X_T \neq 0 = \mathbb{E}X_0$ . ■

现在我们尝试解释必赢策略的问题. 这个例子说明, 假设你我在这样公平游戏中, 只要时间足够长 (谁也不知道需要多长), 我保证可以赢得 100 块钱. 这可以称为必赢策略, 与前面所说的倍增策略一样. 必赢策略不违背 Doob 停止定理, 因为 Doob 停止定理只保证有界时间内的公平, 而这里的  $T$  是无界的. 尽管数学上没有矛盾, 但必赢策略的存在是违背常识的, 因为游戏是对称的, 必赢意味着两个人都能够必赢, 这与游戏的零和性矛盾. 问题出在哪里? 怎么解释这个现象? 下面是我的一个解释. 我认为这是因为系统隐含地强加了不公平条件. 要赢得这钱, 需要两个条

件: (1) 我有近乎无限的赌资, 如果我的赌资有限, 那我可能等不到赢钱就已经破产了; (2) 不公平的约定, 即必须要你陪我玩 (不知道多久) 到我赢得这个钱. 这两个条件破坏了游戏的公平性.

练习 3.2.2 (Wald 等式) 设  $\{\xi_n : n \geq 1\}$  是可积独立同分布随机序列且  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $T$  是可积停时, 证明:  $\mathbb{E} \sum_{n=1}^T \xi_n = 0$ .

练习 3.2.3 设  $\xi_n$  是独立同分布随机序列,  $\mathbb{E}\xi_n = 0$ ,  $\mathbb{E}\xi_n^2 = 1$ , 令  $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $T$  是  $\{X_n\}$  的可积停时, 证明:  $\mathbb{E}X_T^2 = \mathbb{E}T$ .

鞅及 Doob 停止定理非常有用, 是概率论的基本方法之一, 通常称为鞅方法. 在上一章中, 我们用随机游动的马氏性研究首次通过时. 现在我们用鞅方法来研究同样的问题. 假设在概率  $\mathbb{P}$  下,  $\{X_n\}$  是从零点出发的简单随机游动, 向右与向左的概率分别为  $p, q$ .

取正实数  $z$ , 令

$$Y_n := (zp + z^{-1}q)^{-n} z^{X_n},$$

前面例子证明了它是一个鞅 (称为指数鞅). 取正整数  $x$ , 由 Doob 停止定理,

$$\mathbb{E} [(zp + z^{-1}q)^{-n \wedge T_x} z^{X_{n \wedge T_x}}] = \mathbb{E}[Y_0] = 1. \quad (3.2.1)$$

因为  $n \wedge T_x \leq T_x$ , 故  $X_{n \wedge T_x} \leq x$ . 为了极限与期望交换, 只需设  $z$  和  $zp + z^{-1}q$  都大于 1 就可以了. 把上式的左边分成  $T_x < \infty$  与  $T_x = \infty$  两部分, 然后让  $n$  趋于无穷得  $T_x = \infty$  部分的极限是零, 因此推出

$$\mathbb{E} [(zp + z^{-1}q)^{-T_x} z^x; T_x < \infty] = 1. \quad (3.2.2)$$

现在要分两种情况  $p \geq q$  与  $p < q$ . 在第一种情况下,  $z > 1$  蕴含有  $zp + z^{-1}q > 1$ . 因此我们让  $z \downarrow 1$ , 得  $\mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$ . 这时我们甚至可以算出  $T_x$  的母函数, 因为

$$\mathbb{E} [(zp + z^{-1}q)^{-T_x}] = z^{-x}.$$

令  $t = (zp + z^{-1}q)^{-1}$ , 反解出大于 1 的  $z$

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt}.$$

因此

$$\mathbb{E}[t^{T_x}] = \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2pt} \right)^{-x} = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqt^2}}{2qt} \right)^x.$$

在第二种情况下,  $z > q/p$  才有  $zp + z^{-1}q > 1$ , 因此我们让  $z \downarrow q/p$ , 这时  $zp + z^{-1}q \downarrow 1$ , 推出

$$\mathbb{P}(T_x < \infty) = (p/q)^x < 1.$$

下面我们再讨论输光问题 (ruin problem). 现在假设在概率  $\mathbb{P}^x$  之下,  $(X_n)$  是从  $x$  出发的简单随机游动. 任取  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $a > 0$ , 令  $T := T_0 \wedge T_a$ , 即首次通过 0 或  $a$  其一的时间, 或  $\{0, a\}$  的进入时. 从上一节的结论知, 对任何  $x \in \mathbf{Z}$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $\mathbb{P}^x(T_0 < \infty)$  与  $\mathbb{P}^x(T_a < \infty)$  至少有一个是 1, 故  $\mathbb{P}^x(T < \infty) = 1$ . 显然  $\{T < \infty\} = \{T_0 < T_a\} \cup \{T_0 > T_a\}$ , 我们令

$$q_x := \mathbb{P}^x(T_0 < T_a),$$

即从  $x$  出发的随机游动, 到达点 0 在到达点  $a$  之前的概率. 形象地, 这相当于  $A, B$  两人各带  $x, a - x$  枚硬币参加一个简单随机游动形式的赌博游戏, 游戏至其中某人输光所有的硬币时结束, 因此  $q_x$  通常也称为  $A$  的输光概率,  $T$  称为持续时间. 理论上, 这称为是一个具吸收壁  $\{0, a\}$  的简单随机游动.

如果  $p = q = \frac{1}{2}$ , 那么  $\{X_n\}$  是一个鞅, 应用 Doob 停止定理

$$\mathbb{E}^x X_{n \wedge T} = \mathbb{E}^x X_0 = x.$$

显然  $T < \infty$  a.s.,  $X_{n \wedge T} \leq a$ . 因此由控制收敛定理

$$\mathbb{E}^x X_T = \lim_n \mathbb{E}^x X_{n \wedge T} = \mathbb{E}^x X_0.$$

这说明即使在停时无界时, Doob 停止定理仍然可能成立. 因为

$$\mathbb{E}^x X_T = \mathbb{E}^x(X_T; T_0 < T_a) + \mathbb{E}^x(X_T; T_0 > T_a) = a\mathbb{P}^x(T_0 > T_a),$$

所以

$$q_x = 1 - \mathbb{P}(T_0 > T_a) = 1 - \frac{x}{a} = \frac{a - x}{a}.$$

为了计算  $T$  的期望, 我们先证明  $X_n^2 - n, n \geq 0$  是一个鞅, 然后应用停止定理,  $\mathbb{E}^x(X_{n \wedge T}^2) = \mathbb{E}^x(n \wedge T) + x^2$ . 让  $n$  趋于无穷, 的

$$\mathbb{E}^x T = \mathbb{E}^x X_T^2 - x^2 = a^2 \cdot \mathbb{P}^x(T_a < T_0) - x^2 = x(a - x).$$

**练习 3.2.4** 对于对称简单随机游动, 求  $\mathbb{P}^0(T_3 < T_{-3} < T_6)$ .

**练习 3.2.5** 对于非对称情况, 求输光概率与持续时间的期望及母函数.

### 3.3 鞅的应用：不等式与强大数律

下面再介绍 Doob 停止定理的两个重要应用, 先证明 Doob 不等式, 它可以直接地推出著名的 Kolmogorov 不等式. 该不等式是 Kolmogorov 证明独立同分布场合的强大数定律的主要引理.

**定理 3.3.1 (Doob)** 设  $\{X_n : n \geq 0\}$  是非负下鞅. 则对任何  $\lambda > 0$  及正整数  $N$ ,

$$\lambda \mathbb{P}(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda) \leq \mathbb{E}X_N.$$

证明. 令  $\tau := \min\{n \geq 0 : X_n \geq \lambda\}$ , 则  $\tau$  是一个停时, 因为

$$\{\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda\} = \{\tau \leq N\},$$

故由 Doob 通知定理以及  $X_n$  的非负性,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_N &\geq \mathbb{E}X_{\tau \wedge N} \\ &\geq \mathbb{E}(X_\tau; \tau \leq N) \\ &\geq \lambda \mathbb{P}(\max_{0 \leq n \leq N} X_n \geq \lambda), \end{aligned}$$

完成证明. □

**练习 3.3.1** 证明非负上鞅的几乎所有样本轨道到达零之后就永远是零.

设  $\{\xi_n\}$  是平方可积且期望为零的独立同分布随机序列,  $\{X_n\}$  是其部分和序列, 那么  $\{X_n\}$  是平方可积鞅, 应用 Jensen 不等式知  $\{X_n^2\}$  是非负下鞅, 因此有

**推论 3.3.1** Kolmogorov 不等式成立:

$$\mathbb{P}(\max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E}X_N^2.$$

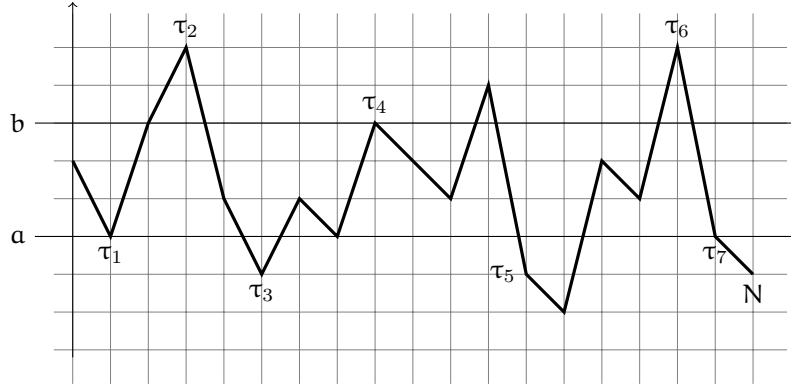
下面再来证明鞅的上穿不等式. 设  $X$  是随机序列, 对  $a < b$ , 定义  $\tau_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \tau_1 &:= \inf\{n \geq \tau_0 : X_n \leq a\}; \\ \tau_2 &:= \inf\{n \geq \tau_1 : X_n \geq b\}; \\ &\dots \dots \\ \tau_{2k+1} &:= \inf\{n \geq \tau_{2k} : X_n \leq a\}; \end{aligned}$$

$$\tau_{2k+2} := \inf\{n \geq \tau_{2k+1} : X_n \geq b\};$$

$$\dots \dots$$

约定  $\inf \emptyset = \infty$ , 则当  $X$  适应时,  $\{\tau_n : n \geq 0\}$  是递增的停时序列且当  $n > 0$  时  $\tau_n \geq n - 1$ .



对  $N \geq 1$ , 令

$$U_N^X[a, b] := \max\{k : \tau_{2k} \leq N\},$$

随机变量  $U_N^X[a, b]$  记录了随机序列  $X$  在时刻 0 与  $N$  之间从  $a$  下跳至  $b$  上的上穿次数. 如上图中, 完整的上穿是 3 个. 下面是著名的 Doob 上穿不等式.

**定理 3.3.2 (Doob)** 设  $X$  是一个下鞅, 则对任何正整数  $N$ , 常数  $a < b$ ,

$$\mathbb{E}(U_N^X[a, b]) \leq \frac{\mathbb{E}(X_N - a)^+ - \mathbb{E}(X_0 - a)^+}{b - a}.$$

证明. 令  $Y_n := (X_n - a)^+$ , 显然  $Y = (Y_n)$  也是一个下鞅. 让  $\tau_1, \tau_2, \dots$  是将 0,  $b - a, Y$  分别取代  $a, b, X$  后如上定义的停时列, 自然  $U_N^X[a, b] = U_N^Y[0, b - a]$ . 由此推出

$$\begin{aligned} Y_N - Y_0 &= \sum_{n \geq 1} (Y_{\tau_n \wedge N} - Y_{\tau_{n-1} \wedge N}) \\ &= \sum_{k \geq 1} (Y_{\tau_{2k} \wedge N} - Y_{\tau_{2k-1} \wedge N}) + \sum_{k \geq 1} (Y_{\tau_{2k-1} \wedge N} - Y_{\tau_{2k-2} \wedge N}) \\ &\geq (b - a)U_N^Y[0, b - a] + \sum_{k \geq 1} (Y_{\tau_{2k-1} \wedge N} - Y_{\tau_{2k-2} \wedge N}). \end{aligned}$$

(请结合下面的思考题想想上面的不等号为什么成立.) 注意上面的求和都是有限和, 再由 Doob 停止定理得,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y_N - \mathbb{E}Y_0 &\geq (b-a)\mathbb{E}U_N^X[a, b] + \sum_{k \geq 1} (\mathbb{E}Y_{\tau_{2k-1} \wedge N} - \mathbb{E}Y_{\tau_{2k-2} \wedge N}) \\ &\geq (b-a)\mathbb{E}U_N^X[a, b].\end{aligned}$$

完成证明.  $\square$

练习 3.3.2 思考: 请判断下面的论证是否成立? 并由此说明定理的证明是正确的.

$$\begin{aligned}X_N - X_0 &= \sum_{n \geq 1} (X_{\tau_n \wedge N} - X_{\tau_{n-1} \wedge N}) \\ &= \sum_{k \geq 1} (X_{\tau_{2k} \wedge N} - X_{\tau_{2k-1} \wedge N}) + \sum_{k \geq 1} (X_{\tau_{2k-1} \wedge N} - X_{\tau_{2k-2} \wedge N}) \\ &\geq (b-a)U_N^X[a, b] + \sum_{k \geq 1} (X_{\tau_{2k-1} \wedge N} - X_{\tau_{2k-2} \wedge N}),\end{aligned}$$

然后取期望, 应用 Doob 停止定理推出

$$\mathbb{E}X_N - \mathbb{E}X_0 \geq (b-a)\mathbb{E}U_N^X[a, b].$$

Doob 上穿不等式是证明所有的鞅或下 (上) 鞅收敛定理的基本工具.

定理 3.3.3 设  $\{X_n\}$  是下鞅且  $K = \sup_n \mathbb{E}|X_n| < \infty$ , 则  $X_n$  a.s. 收敛于一个可积随机变量.

证明. 设  $X^*, X_*$  分别是  $\{X_n\}$  的上极限与下极限 (可能是  $\pm\infty$ ). 显然

$$\{X^* > X_*\} = \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}} \{X_* < a < b < X^*\}.$$

由上穿不等式

$$\mathbb{E}U_N^X[a, b] \leq \frac{1}{b-a}(\mathbb{E}|X_N| + a) \leq \frac{K+a}{b-a}.$$

由单调收敛定理推出  $\mathbb{E} \lim_N U_N^X[a, b] < +\infty$ . 因此  $\lim_N U_N^X[a, b] < +\infty$  a.s.. 但是

$$\{X_* < a < b < X^*\} \subset \{\lim_N U_N^X[a, b] = +\infty\},$$

故有  $\mathbb{P}(\{X_* < a < b < X^*\}) = 0$ , 推出  $X^* = X_*$  a.s., 记为  $X_\infty$ . 由 Fatou 引理得  $\mathbb{E}|X_\infty| \leq \liminf \mathbb{E}|X_n| \leq K$ .  $\square$

作为应用, 我们给 Kolmogorov 强大数定律一个非常简单而漂亮的证明. 注意, 在鞅 (或者上下鞅) 的定义中, 时间集可以是正整数, 也可以是负整数, 对于负整数时间的下鞅, 鞅收敛定理的结论仍然成立, 这时  $n$  趋于负无穷.

设  $\{\xi_n\}$  是独立同分布可积的随机序列, 期望等于零. 令  $S_n := \sum_{j=1}^n \xi_j$ , 用  $f$  表示  $\xi_n$  的特征函数, 那么  $f$  在 0 点可导且导数为零. 显然对任何  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\lim_n \mathbb{E} \left( e^{ixS_n/n} \right) = \lim_n f(x/n)^n = e^{f'(0)} = 1,$$

所以  $S_n/n$  依分布收敛于 0, 也是依概率收敛于 0. 下面只需证明它是几乎处处收敛即可.

一个重要的观察是

$$\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(\xi_1 | S_n).$$

事实上, 只需验证对任何 Borel 集  $A$ , 有

$$\mathbb{E}(\xi_1 1_A(S_n)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(S_n 1_A(S_n)),$$

这来自于对称性. 这启发以下定理.

**定理 3.3.4**

$$\cdots, \frac{S_n}{n}, \cdots, \frac{S_2}{2}, S_1$$

是一个鞅.

证明. 令  $X_{-n} := S_n/n$ ,  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_{-n} := \sigma(\cdots, X_{-(n+1)}, X_{-n})$  是自然流. 注意随机序列和流都是以负整数为下标的. 按照定义, 对  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{-1} | \mathcal{F}_{-n}) &= \mathbb{E}(\xi_1 | S_n, S_{n+1}, \cdots) \\ &= \mathbb{E}(\xi_1 | S_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots) \\ &= \mathbb{E}(\xi_1 | S_n) = \frac{S_n}{n} = X_{-n}, \end{aligned}$$

这推出定理结论. □

最后  $\mathbb{E}|X_{-n}| \leq \mathbb{E}|\xi_1|$ , 应用定理 3.3.3,  $X_{-n}$  几乎处处收敛.

**练习 3.3.3** 设  $\{Y_n\}$  是独立同分布随机序列, 以概率  $p$  与  $q$  分别取值  $1/2$  与  $3/2$ . 记  $X_n := Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ .

1. 求  $p$  的范围使  $X_n$  是下鞅, 鞅, 上鞅;
2. 求  $p$  的范围使  $\lim \mathbb{E}X_n = \infty$
3. 求  $p$  的范围使  $X_n$  a.s. 趋于零.

### 3.4 鞅的应用: 金融市场

在本节中, 我们将看到鞅的思想完美地解释了期权定价理论, 该理论的创始人 Scholes 与 Merton 因此获得 Nobel 经济学奖 (另一主要创始人 Black 在此时已过世). 他们的奠基性工作发表于 20 世纪 70 年代, 使得金融数学在随后的 30 多年中成为研究热点之一. 本节中介绍的很多和金融相关的概念不一定标准, 只在本教程使用.

首先来看**股票市场**, 我们使用离散时间  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ , 用  $S_k$  表示股票在  $k$  时刻的价格, 是一个随机变量,  $(S_k)$  组成一个随机序列. 投资人可以任意地买卖股票, 从股票的价格变化中获利或者损失, 是有风险的, 所以股票市场也称为风险市场. 用  $\mathcal{F}_k$  表示  $\{S_0, S_1, \dots, S_k\}$  生成的事件域,  $0 \leq k \leq n$ , 且不妨设  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n$ . 设  $\bar{\mathbb{P}}$  是  $(\Omega, \mathcal{F})$  上另外一个概率, 如果对任何  $A \in \mathcal{F}_n$ ,  $\mathbb{P}(A) > 0$  当且仅当  $\bar{\mathbb{P}}(A) > 0$ , 则我们说两个概率等价.

再假设存在另一个市场, 让我们称为**货币市场**, 就是说任何人都可以以固定的利息率  $r$  (向银行) 存款或 (从银行) 贷款, 即存入银行 (对应地, 贷出) 的 1 单位的货币在下一时刻可以取回 (对应地, 要归还)  $1 + r$  单位,  $r$  也称为货币的时间价值. 货币市场是不存在风险的, 所以也称为无风险市场. 与利息相对的概念是折现, 下一个时刻的 1 单位的货币在现在的价值是  $(1 + r)^{-1}$ , 称为折现. 不同时间的财富需要折现到同一个时间才能进行比较.

这样, 上面描述的有风险的股票市场和无风险的货币市场组成**金融市场**, 简称市场. 存款贷款买卖股票是市场的通常投资行为. 当然这是一个极其简化的模型, 不足以演绎真正的股票市场, 但隐含在其中的思想是深刻的, 对真正的市场有启发作用. 现在任何人都可以在这个市场上通过买卖股票以及存贷款来达到赚钱的目的, 人的趋利性是指他总希望以最小的代价赚取最大利润.

一个投资策略是决定在每个时刻  $k$  购买的股票数量  $\Delta_k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , 并把剩余资金 (正) 存入银行或 (负) 向银行贷款. 在这个时刻投资人所有的信息是 0 到  $k$



时刻股票的价格走势, 故  $\Delta_k$  是  $\mathcal{F}_k$  可测的.

**定义 3.4.1** 随机过程  $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}\}$  称为是一个投资策略 (portfolio), 如果  $\Delta_k$  是  $\mathcal{F}_k$  可测的,  $0 \leq k \leq n-1$ . 一个投资策略是可许的, 如果任何  $\Delta_k$  有界. 我们说一个投资过程是自融资的, 如果除初始投资  $X_0$  外, 在投资过程中投资者的财富变化只来自市场.

用  $X_k$  表示投资人在  $k$  时刻拥有的财富, 然后他用  $\Delta_k S_k$  的资金买  $\Delta_k$  份股票, 且把剩下的资金  $X_k - \Delta_k S_k$  存入银行. 注意这些数量  $\Delta_k$  与  $X_k - \Delta_k S_k$  可正可负, 正代表买股与存款, 负代表卖股与贷款. 由于股票的变化以及利率, 在  $k+1$  时刻投资人的财富为

$$X_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + (1+r)(X_k - \Delta_k S_k),$$

过程  $X = \{X_k : 0 \leq k \leq n\}$  称为是初始投资为  $X_0$ , 投资策略为  $\Delta$  的自融资方式下的财富过程, 简称为财富过程. 上式写成

$$X_{k+1} - (1+r)X_k = \Delta_k(S_{k+1} - (1+r)S_k). \quad (3.4.1)$$

当  $r = 0$  时, 这正是在鞅基本定理中所谓的具有实际背景的运算: 随机积分. 一般地, 因为货币的时间价值, 所以需将财富折现进行运算. 定义  $\bar{S}_k := (1+r)^{-k}S_k$ ,  $\bar{X}_k := (1+r)^{-k}X_k$ , 则有下面的结论.

**引理 3.4.1** 财富过程是投资策略关于股票价格的随机积分, 即

$$\bar{X}_{k+1} - \bar{X}_k = \Delta_k(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) \quad (3.4.2)$$

我们说一个市场有套利机会, 是指存在一个投资策略可以无风险地 (无论股票市场任何变化) 从一无所有而赚到钱, 否则我们说市场无套利. 比如说如果一个银行的存款利率高于另一个银行的贷款利率, 那么这里就存在套利机会, 因为你可以从后一个银行贷款存入前一个银行而获得无风险的利率差额. 合理的假设是, 一个成熟的市场没有套利机会. 现在我们给套利这个概念一个严格的数学定义.

**定义 3.4.2** 一个市场存在套利是指存在一个可许的投资策略  $\Delta$  使得其初始投资  $X_0 = 0$ , 自融资方式下的财富过程  $X$  满足  $X_n \geq 0$  且  $\mathbb{P}(X_n > 0) > 0$ . 一个无套利的市场称为有效的, 或者有效市场.

在  $X_n$  非负时,  $\mathbb{P}(X_n > 0) > 0$  等价于  $\mathbb{E}X_n > 0$ . 什么条件下市场有效呢?

**定义 3.4.3** 如果概率  $\bar{\mathbb{P}}$  等价于  $\mathbb{P}$  且使得折现后的股票价格  $\{\bar{S}_k\}$  在  $\bar{\mathbb{P}}$  之下是一个鞅, 那么  $\bar{\mathbb{P}}$  称为等价鞅测度.

**练习 3.4.1** 设  $X$  是非零随机变量. 问  $X$  满足什么条件可以存在  $\mathbb{P}$  的等价概率测度  $\bar{\mathbb{P}}$  使得  $X_0 = 0, X_1 = X$  是鞅?

**定理 3.4.1** 如果等价鞅测度存在, 那么市场有效.

**证明.** 如果折现后的股票价格在  $\bar{\mathbb{P}}$  之下是鞅, 而折现后的财富过程是折现后股票价格的随机积分, 由鞅基本定理推出折现后财富过程也是鞅, 因此  $\bar{\mathbb{E}}X_n = (1+r)^n \bar{\mathbb{E}}X_0$ . 若初始投资  $X_0 = 0$ , 则  $\bar{\mathbb{E}}X_n = 0$ , 因此  $X_n \geq 0$  蕴含  $\bar{\mathbb{P}}(X_n > 0) = 0$ . 因为  $\mathbb{P}$  与  $\bar{\mathbb{P}}$  等价, 故推出  $\mathbb{P}(X_n > 0) = 0$ . 因此市场无套利.  $\square$

实际上, 这个定理的逆也成立, 但证明比较难. 现在我们考虑一个特殊情况. 让  $\xi_1, \dots, \xi_n$  是概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上的独立同分布非负随机变量,  $S_0$  是一个正常数, 令  $S_k := S_0 \cdot \xi_1 \cdots \xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . (这时我们说该市场是简单金融市场, 尽管我们实际上不需要这个概念.) 再假设

$$\mathbb{P}(\xi_k = u) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_k = d) = q = 1 - p,$$

其中  $u, d$  是常数满足  $0 < d < 1 < u$ . 这是说股票在  $k+1$  时刻价格分别以概率  $p, q$  等于  $k$  时刻价格的  $u$  倍和  $d$  倍, 分别表示涨与跌. 这样的市场称为是一个二项(二叉)股票市场, 它实际上由常数  $u, d, p$  决定. 因为  $\{S_k\}$  与  $\{\xi_k\}$  可以互相表示, 故  $\mathcal{F}_k = \sigma(\{\xi_1, \dots, \xi_k\})$ , 这时任何  $\mathcal{F}_k$  可测的随机变量  $X$  都可以表示为  $\xi_1, \dots, \xi_k$  的函数, 常简单地写成为

$$X = X(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

以上的二项市场按照其中的参数记为  $M(r, u, d, p, S_0)$ . 首先我们证明下面定理.

**定理 3.4.2** 二项市场有效当且仅当  $d < 1 + r < u$ .

**证明.** 先证明必要性. 如果  $1 + r \geq u$ , 也就是说利率过高, 那么人们可以先卖出(买空) 1 股股票, 获得资金  $S_0$ , 存入银行, 在下一时刻取出存款买回股票, 获利为  $(1+r)S_0 - S_1$ , 因为  $1+r \geq u > d$ , 所以此随机变量是非负的, 而且以正概率大于 0, 因此市场存在套利. 同样我们可以证明如果利率过低  $1 + r \leq d$ , 那么人们可以贷款去买股票而获得无风险收益, 故市场也有套利机会.

现在证明充分性. 设  $d < 1 + r < u$ . 我们期望在空间  $(\Omega, \mathcal{F}_n)$  上有一个等价概率  $\bar{\mathbb{P}}$  使得在概率  $\bar{\mathbb{P}}$  下, 经过折现的股票价格  $\{(1+r)^{-k}S_k : k = 0, 1, 2, \dots, n\}$  是一个鞅. 假设有这个概率  $\bar{\mathbb{P}}$  使得在它之下  $\xi_1, \dots, \xi_n$  是独立同分布的, 分布为

$$\bar{\mathbb{P}}(\xi_1 = u) = \bar{p}, \quad \bar{\mathbb{P}}(\xi_1 = d) = \bar{q},$$

其中  $0 < \bar{p} < 1$  且  $\bar{q} = 1 - \bar{p}$ . 那么至少  $\bar{\mathbb{P}}$  与  $\mathbb{P}$  等价, 然后由独立性

$$\bar{\mathbb{E}}((1+r)^{-k-1}S_{k+1}|\mathcal{F}_k) = (1+r)^{-k}S_k\bar{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{1+r}\xi_{k+1}\right),$$

显然折现后的股票价格是鞅当且仅当  $\bar{\mathbb{E}}\xi_{k+1} = 1+r$ , 即  $\bar{p}u + (1-\bar{p})d = 1+r$ ,  $\bar{p}$  有唯一解

$$\bar{p} := \frac{1+r-d}{u-d}.$$

这时根据定理 3.4.1, 立刻推出市场是有效的.  $\square$

实际上, 投资者可以直观地认识到市场有效运转的条件是  $d < 1+r < u$ , 但美妙的是我们把相关的概念数学化并给出一个严谨的证明. 另外, 上面定理证明必要性的一段是利用反证假设构造一个套利, 称为套利论证. 套利论证是一种直观且通俗易懂的证明思想, 后面还会经常使用.

**练习 3.4.2 证明:** 在二项市场中, 等价鞅测度唯一. (在  $n=2$  时证明即可. 提示: 首先要把  $\mathbb{P}$  的所有等价概率测度写出来, 然后从中找鞅测度.) 另外, 考虑简单金融市场, 假设构成市场的  $\xi_k$  取有限多个非负值, 请寻找等价鞅测度存在的 (充要) 条件, 与等价鞅测度唯一的 (充要) 条件.

以上所说的通过投资策略进行投资是通常的市场投资方式. 金融市场经历了几百年的发展, 金融创新层出不穷, 产生出大量新的投资方式, 统称为衍生证券或者金融产品, 它们的存在极大地活跃了金融市场. 衍生证券是依附于股票价格的合约, 它的价值依赖于股票价值, 如期货期权. 期货是到期必须执行的合约, 是线性的, 比较简单. 期权是到期不一定需要执行的合约, 是非线性的, 比较复杂. 下面我们以期权为例. 引入期权的本来目的是对冲风险, 但资本的逐利性使得期权也可以成为加大杠杆的投资工具. 市场上有很多不同的期权, 欧式, 美式, 亚式, 花样期权等等. 欧式买入期权是最简单的一种, 是指在商定的时刻可以以商定的价格 (不管此时刻股票的真实价格) 来购买股票的一份合约. 期权是个权利, 但不是义务 (不象期货的合约

必须要被执行). 显然, 一个在商定时刻  $n$  以商定价格  $K$  购买股票的欧式期权在时刻  $n$  的价值为

$$V_n := (S_n - K)^+,$$

也就是说如果到商定的时刻  $n$ , 股票价格  $S_n$  高于商定价格  $K$ , 那么执行合约, 以价  $K$  购买市场价为  $S_n$  的股票而获利  $S_n - K$ , 如果此时股票价格  $S_n$  低于商定价格  $K$  而使得合约无利可图, 那么选择放弃执行合约, 获利为 0.  $V_n$  是  $S_n$  的函数, 是  $\mathcal{F}_n$  可测的随机变量.

**练习 3.4.3** 期货是指在敲定时间以敲定价格购买股票的必须执行的合约, 它在当前时间的价值为零. 因此期货的问题是决定敲定价格. 假设市场有效, 以套利论证证明在 0 时刻签订的一份在 1 时刻购买一份股票的期货合约中敲定价格为  $K = (1+r)S_0$ .

我们先来说说投资的常识. 期权当然不能是无偿的, 它应该卖多少钱? 一个随机商品通常的价钱是它的期望 (的折现), 这是大数定律决定的. 但这个价钱是有风险的, 只是在市场规模很大的时候单个交易的风险变得很小, 例如财产保险, 对于市场规模很大的保险公司来说风险几乎可以忽略, 但风险依然存在, 例如当飓风或者山火大面积灾害发生的时候.

期权虽然也是随机商品, 但因为它的价值基于股票价值, 所以它具有一个无风险的价格, 这正是期权定价问题所指的价格. 本质上讲期权也是一种投资, 如果市场足够丰富, 那么直观上, 投资期权所能获得的收益可以通过市场通常投资方式获得, 这时我们说期权可以被对冲或者复制. 因此卖期权的机构和卖财产保险的机构不同, 卖保险的机构在卖掉一份保险后需要祈祷风调雨顺, 客户的财产没有损失, 而卖期权的机构是卖掉一份期权后只需要在市场上复制一份, 最后无论市场如何变幻, 机构都能拿来一份收益交给客户.

既然投资期权可以被复制, 那为什么投资者还要投资期权呢? 这当然有很多原因, 重要的原因之一是杠杆, 因为同样的资金可以购买的期权数量可能远多于可以购买的股票数量. 如果如愿赚钱, 那么投资期权所赚的远多于投资股票所赚的; 反之, 如果亏损, 那么投资期权将一无所有, 而投资股票至少还拥有股票, 只要不卖掉, 就还有翻本的机会. 现在我们在数学上把这几个概念确定下来.

**定义 3.4.4** 一个在时刻  $n$  到期的衍生证券是指一个  $\mathcal{F}_n$  可测的随机变量, 也就是说, 它的价值到时刻  $n$  才完全确定,  $n$  也称为敲定时间; 非负的衍生证券也称为未定权益, 简称权益, 期权是权益的一种; 一个在时刻  $n$  到期的权益  $V_n$  称为可对冲 (或者

说复制) 的, 是指存在初始资金  $X_0$  与一个投资策略  $\Delta$  使其自融资方式下的财富过程  $X$  满足  $X_n = V_n$ . 这时,  $X_0$  称为  $V_n$  的风险中性定价. 一个市场是完备的是指任何权益都可对冲.

现在市场上还有权益, 投资者可以通过买卖权益来投资, 市场的有效性定义中所说的投资方式需要包括对于权益的投资. 显然, 如果市场有效, 那么任何权益在到期时在市场上的价格是唯一的, 称为一价性. 这是因为如果市场上某个未到期权益的价格不一, 那么显然可以通过买卖该权益获得套利.

**定理 3.4.3** 如果市场有效且完备, 那么权益  $V_n$  的价格必须是其风险中性定价.

证明. 不妨设  $n = 1$ . 设  $X_0$  是权益  $V_1$  的风险中性定价. 我们再次使用套利论证. 如果期权售出的价格不是  $X_0$ , 那么一定有套利机会存在. 事实上, 设市场上可以以价格为  $W_0$  购买这样一份期权. 若售价过低  $W_0 < X_0$ , 则投资者可以卖出  $\Delta_0$  股股票用所得的资金  $\Delta_0 S_0$  购买一份期权, 其余投入货币市场, 在下一时刻买回  $\Delta_0$  股, 那么下一时刻获利为

$$V_1 + (1+r)(\Delta_0 S_0 - W_0) - \Delta_0 S_1 = (1+r)(X_0 - W_0) > 0,$$

即市场有套利机会, 同样可以证明若  $W_0 > X_0$ , 市场也存在套利机会. 也就是说, 在一个有效市场中, 期权  $V_1$  在时刻 0 的价格必须等于  $X_0$ .  $\square$

市场是完备的吗? 简单分析一下必要性, 假设  $V_n$  是一个可对冲的权益, 由定义存在初始资金  $X_0$  与一个投资策略  $\Delta$  使其自融资方式下的财富过程  $(X_k)$  满足  $X_n = V_n$ . 这时, 在时刻  $k$ ,  $X_k$  称为权益  $V_n$  的风险中性定价或者对冲定价. 设市场有效, 那么在风险中性的概率  $\mathbb{P}$  之下,  $\{\bar{X}_k\}$  是鞅, 因此

$$\bar{X}_k = \mathbb{E}((1+r)^{-n} X_n | \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}((1+r)^{-n} V_n | \mathcal{F}_k).$$

这说明两个事情: 1. 权益的无风险定价是其在等价鞅测度下的期望之折现; 2. 对冲的问题转化为这个已知的鞅  $(\bar{X}_k)$  是否可以表示为折现股票组成的鞅  $(\bar{S}_k)$  的随机积分.

**练习 3.4.4** 证明: 如果市场有效且完备, 那么等价鞅测度唯一.

鞅基本定理断言鞅的随机积分还是鞅, 反过来, 一个鞅是否是另一个鞅的随机积分?

**定义 3.4.5** 设  $(S_k)$  是一个鞅,  $(\mathcal{F}_k)$  是其自然流. 如果任何  $(\mathcal{F}_k)$  鞅是  $(S_k)$  的随机积分, 那么我们说  $(S_k)$  有鞅表示性质.

下面的定理在此没有本质的意义, 但是它把市场完备性与数学上的一个性质联系起来了, 在一般理论中非常重要.

**定理 3.4.4** 在市场有效的假设下, 市场的完备性等价于折现后的股票价格在等价鞅测度下有鞅表示性质.

一般的鞅不一定有鞅表示性质, 下面我们证明二项市场很特殊, 也有这个性质.

**定理 3.4.5** 一个有效的二项市场必是完备的.

证明这个定理的手段是初等的. 为了说明问题的本质, 设  $n = 1$ . 我们要证明可以通过市场投资赚到这个权益  $V_1$ . 也就是说, 可以通过初始资金  $X_0$  以及买  $\Delta_0$  股股票使得下一刻的财富  $X_1$  恰好是  $V_1$ , 用数学的言语说, 方程

$$V_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0)$$

可以决定  $X_0$  与  $\Delta_0$ . 一般情况下这方程未必可解, 但现在假设市场是二项的, 可以把上式分两种情况考虑: 股票涨或者跌. 写  $V_1^u := V_1|_{\xi_1=u} = (uS_0 - K)^+$ ,  $V_1^d := V_1|_{\xi_1=d} = (dS_0 - K)^+$ , 那么得到

$$V_1^u = \Delta_0 u S_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \quad (3.4.3)$$

$$V_1^d = \Delta_0 d S_0 + (1+r)(X_0 - \Delta_0 S_0), \quad (3.4.4)$$

非常巧, 两个线性方程两个未知数. 相减得,

$$V_1^u - V_1^d = \Delta_0 S_0(u - d), \quad \Delta_0 = \frac{V_1^u - V_1^d}{uS_0 - dS_0}.$$

代入方程 (3.4.3), 解得

$$X_0 = \frac{1}{1+r} \left( \frac{1+r-d}{u-d} V_1^u + \frac{u-(1+r)}{u-d} V_1^d \right).$$

同时也找到了对冲这个期权的策略: 用资金  $X_0$  开始, 购买  $\Delta_0$  股股票, 将剩余的资金存入银行.

这里再一次证明了

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E} V_1,$$

令人感到惊奇的是  $V_0$  仅依赖于  $u, d, r, K, S_0$ , 而与市场中最无法捉摸的, 体现市场风险的概率  $p$  无关. 因此我们说  $V_0$  是风险中性定价, 概率  $\bar{p}$  是风险中性概率. 与大多数定律定价不同, 这是权益在等价鞅测度下期望的折现,

上面的论述是说, 为了保证下一刻赚多少钱, 这一刻需要有多少资金且应该怎么投资. 我们有  $n$  时刻到期的权益  $V_n$ , 那么  $n-1$  时刻的资金  $X_{n-1}$  与投资  $\Delta_{n-1}$  需满足方程

$$V_n = \Delta_{n-1}S_n + (1+r)(X_{n-1} - \Delta_{n-1}S_{n-1}).$$

在这个时刻只有  $\xi_n$  是随机的, 类似地, 将  $\xi_n$  分别用  $u, d$  代替得到两个方程, 在  $V_n$  中代入后得到的量分别记为  $V_n^u$  与  $V_n^d$ . 解出

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \frac{1}{1+r} (\bar{p}V_n^u + \bar{q}V_n^d) = \frac{1}{1+r} \bar{\mathbb{E}}(V_n | \mathcal{F}_{n-1}), \\ \Delta_{n-1} &= \frac{V_n^u - V_n^d}{(u-d)S_{n-1}}. \end{aligned}$$

权益的无套利价格  $V_{n-1}$  必须是所需的资金  $X_{n-1}$ . 这样一步步倒推得到所有时刻的权益价值与投资策略.

上面的讨论实际上已经为权益提供了一个构造对冲的清晰思路. 设  $V_n$  是一个权益, 对  $k=0, 1, \dots, n-1$ , 注意  $V_{k+1}$  是  $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$  的函数, 让其中的  $\xi_{k+1}$  分别取值  $u, d$  所得到的随机变量分别记为  $V_{k+1}^u$  与  $V_{k+1}^d$ , 定义  $V_k$  和  $\Delta_k$

$$V_k := \frac{1}{1+r} \bar{\mathbb{E}}(V_{k+1} | \mathcal{F}_k), \quad \Delta_k := \frac{V_{k+1}^u - V_{k+1}^d}{(u-d)S_k}.$$

显然  $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}\}$  是一个投资策略. 那么初始投资为  $X_0 = V_0$ , 投资策略为  $\Delta$  的自融资方式下的财富过程  $\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$  满足对任何  $k \leq n$ ,  $X_k = V_k$ , 恰好对冲  $V_n$ .

**练习 3.4.5 证明:**  $\bar{\mathbb{E}}(V_{k+1} | \mathcal{F}_k) = \bar{p}V_{k+1}^u + \bar{q}V_{k+1}^d$ .

上面的一系列定理断言二项市场可以是有效的, 且在有效时也是完备的. 什么是二项市场? 三项或者四项市场, 即  $\xi_k$  取三个或四个值呢?

**练习 3.4.6 证明在一定条件下, 三项市场的等价鞅测度存在, 但不唯一, 不再有鞅表示定理, 即市场依然可以有效但不完备.**

通俗地说, 市场有效是指信息透明, 市场完备是指交易方便. 例如山里一个老人家里有一个祖传的唐代古碗, 市场价值一万, 他不知道所以 10 块前卖给了游客, 这

是市场不有效. 即使他知道碗市价一万, 但没有人来交易也没用, 这是有价无市, 市场不完备.

练习 3.4.7 设有一股票现在时刻 0 的价格是 50 元, 在每个时间段都以  $3/4$  的概率上涨 20%, 以  $1/4$  的概率下跌 20%, 假设利率可以忽略, 某个顾客欲在证券代理公司购买在时刻 2 到期的商定价格为 52 元的欧式看跌期权, 也就是说他有在时刻 2 以 52 元的价格卖给代理公司一股股票的权利, 问这份期权应该卖多少钱? 代理公司应该怎么投资来对冲风险, 如果时刻 1 股票下跌, 这份期权还值多少钱? 代理公司又应该怎么操作?

练习 3.4.8 设  $V_m := (S_m - K)^+$ ,  $T$  是个停时且  $T \leq n$ . 证明:

$$\mathbb{E}[(1+r)^{-T}V_T] \leq \mathbb{E}[(1+r)^{-n}V_n].$$

左边是一个提前执行的欧式期权价值 (也叫做美式期权), 因此一个欧式买入期权提前执行的价值不会更大.

前面说过, 金融数学大概在 1970 年后因为 Black-Scholes 关于期权定价的论文而兴起, 他们的模型是用布朗运动描述的, N. Wiener 在 1921 年证明了数学上的布朗运动存在; K. Itô 在 1944 年及之后的十年内发表了随机积分和随机微分方程理论, 证明了布朗运动有鞅表示性质; 鞅理论是 J.L. Doob 在差不多同时提出的. 在期权定价理论的发展过程中, 数学家惊讶地发现描述市场的数学工具早在几十年前就准备就绪. 这个例子说明数学的发展经常超前于应用, 或者说应用未必是数学发展的主要动力. 另外一个类似的例子是 1915 年爱因斯坦提出广义相对论, 发现描述广义相对论所需要的数学工具球面几何, 早在 19 世纪中期就由 Riemann 准备好了.



## 第四章 马氏链

### 4.1 马氏链与转移函数

回忆随机游动, 它的下一步动作是以每个固定的概率往左或者往右一步, 与过去怎么走无关, 这就是所谓的马氏性. 在本章中我们讨论一般的马氏链. 一个马氏链的运动 (确切地是说分布) 由其出发点和转移机制决定. 什么是转移机制? 简单地说, 当一个物体处于一个确定的位置时, 下一步以什么概率去什么位置是一个确定的规则, 这个规则用转移函数或者转移概率表达. 先叙述马氏性与马氏链的定义, 设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  是一个概率空间,  $E$  是有限或者可列集,  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  是一个以  $E$  为状态空间的随机序列.

**定义 4.1.1** 随机序列  $X$  满足马氏性, 是指对任何时刻  $n$  和  $y \in E$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0, \dots, X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n).$$

由条件期望的定义, 这等价于对任何  $x_0, \dots, x_n \in E$  有

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_i = x_i, 0 \leq i \leq n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n).$$

也就是说条件分布律只依赖于现在的位置  $x_n$ . 条件概率  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$  是  $n$  时刻位于  $x$  的粒子下一步转移至  $y$  的概率. 这个转移不仅与位置有关也与时间有关. 怎么理解与时间有关呢? 假设甲参加一个简单的掷硬币赌博, 第  $n$  局的输赢是  $n$  元钱, 那么甲在第  $n$  局后手中的赌资  $X_n$  满足马氏性, 但是甲在下一局输或者赢的钱数是和第几局有关的. 如果规则是每一局的输赢是固定的钱数, 那么甲在下一局输或赢的钱数和第几局无关. 为了简化问题, 我们假设条件概率  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$  与时间  $n$  无关, 这个假设的性质称为时间齐性.

**定义 4.1.2** 一个满足马氏性和时间齐性的随机序列称为马氏链.

设  $X$  是马氏链, 让我们抽取其中的转移机制. 对任何  $x, y \in E$ , 令

$$p_{x,y} = p(x, y) := \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x),$$

它与  $n$  无关, 直观地叫做  $x$  转移至  $y$  的概率.  $p$  是  $E \times E$  上的函数, 满足

$$(1) \quad p(x, y) \geq 0;$$

$$(2) \quad \sum_{y \in E} p(x, y) = 1.$$

这样的函数  $p$  称为  $E$  上的转移函数或者转移概率, 它可以看作一个矩阵, 称为转移矩阵, 作为矩阵它的每一行元素和是 1. 由乘法公式, 马氏链的有限维分布可以写成为

$$\mathbb{P}(X_i = x_i, 0 \leq i \leq n) = \mu_{x_0} p(x_0, x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n), \quad (4.1.1)$$

其中  $\mu_{x_0} = \mathbb{P}(X_0 = x_0)$ , 也就是说, 有限维分布由转移概率和初始分布 ( $X_0$  的分布) 所决定. 确切地说, 上述的  $X$  是概率  $\mathbb{P}$  下有转移函数  $p$  与初始分布  $\mu$  的马氏链.

为了方便, 我们希望可以像研究随机游动那样, 对任何  $x \in E$ , 有概率  $\mathbb{P}^x$  使得  $X$  在它之下是  $x$  出发且具有相同转移机制的马氏链. 这可以做到吗? 假设  $X$  是上述马氏链. 对任何  $x \in E$ , 如果  $\mathbb{P}(X_0 = x) > 0$ , 那么定义概率  $\mathbb{P}^x(A) := \mathbb{P}(A | X_0 = x)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ . 证明:  $X$  在概率  $\mathbb{P}^x$  下有转移概率  $p$  且以  $x$  点的单点分布为初始分布的或者说从  $x$  出发的马氏链, 即  $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ . 但是当  $\mathbb{P}(X_0 = x) = 0$  时, 我们无法定义  $\mathbb{P}^x$ . 不仅如此, 有时候, 我们只有转移函数, 没有概率空间与马氏链, 这时是否可能构造马氏链来研究转移函数呢? 换句话说, 给定  $E$  上一个转移函数  $p(x, y)$ ,  $x, y \in E$ , 和  $E$  上的一个分布  $\mu = (\mu_x)$ , 是否存在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  和随机序列  $(X_n)$  使得 (4.1.1) 成立呢? 答案是肯定的, 这是 Kolmogorov 相容性定理, 为了逻辑上完美, 我们应该给予证明. 但这里, 我们不得不放弃对逻辑完美性的追求, 不加证明地承认它. 这么做有两个理由, 第一, 这个结论看上去比较自然, 一些读者也许根本意识不到这是一个问题. 当然觉得不是问题的也未必真不是问题, 古希腊数学家曾经说任何两个正数都是可公度的, 即都是某个数的整数倍, 很多年都没有人觉得这是个问题, 但其实有很大的问题. 想明白什么需要证明就是很大的进步. 第二, 这是概率论中最基本也是最困难的问题之一. 一个概率是一个满足可列可加性的集函数, 它的构造当空间是不可数无限时是困难的, 而当空间是无限乘积空间时更是难上加难, 其难度与曲折偏离了我们为这个课程设定的主旨: 简单直观有趣.

我们取特别的初始分布: 对任何点  $x \in E$ ,  $1_{\{x_0=x\}}$  是  $x$  点的单点分布, 因此有下面的马氏链存在性定理.

**定理 4.1.1** 给定  $E$  上一个转移函数  $(p(x, y) : x, y \in E)$ , 存在一个可测空间  $(\Omega, \mathcal{F})$ , 随机序列  $X = \{X_n : n \geq 0\}$  与概率  $\mathbb{P}^x, x \in E$ , 满足:

$$\mathbb{P}^x(X_j = x_j, 0 \leq j \leq n) = 1_{\{x_0=x\}} p(x_0, x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n). \quad (4.1.2)$$

上式等价于

- (1) 对任何  $x \in E$ ,  $\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1$ ;
- (2) 对任何  $n \geq 0, x_1, \dots, x_n = y, z \in E$ ,

$$\mathbb{P}^x(X_{n+1} = z | X_n = y, \dots, X_1 = x_1) = p(y, z).$$

**练习 4.1.1** 证明定理中的等价性.

**练习 4.1.2** 设  $(p_x)$  是  $E$  上的一个分布律, 证明: 存在独立且分布律是  $(p_x)$  的随机序列. 因此独立同分布随机序列的存在性是上述定理的推论.

**定义 4.1.3** 给定转移函数  $(p_{x,y})$ , 上面定理中的随机序列  $X = \{X_n : n \geq 0\}$  和概率族  $\{\mathbb{P}^x : x \in E\}$  称为是该转移函数对应的马氏链.

马氏链的存在性很直观, 它可以被看成是一个在空间  $E$  的点上按照某种规则跳动的猫. 定理中的 (1) 说明初始时刻猫在位置  $x$  上, (2) 是移动规则, 若猫在  $n$  时刻在位置  $y$  上, 则它以概率  $p(y, z)$  跳到位置  $z$  上.

在第二章中我们说过, 每个随机过程在轨道空间上有一个分布, 因此定理中的样本空间  $\Omega$  不妨是轨道空间, 即时间集到  $E$  的映射全体,  $X = (X_n)$  是坐标过程,  $\mathcal{F}$  是坐标过程全体生成的  $\sigma$ -代数. 在本章下面, 为了方便, 我们就作这样的假设. 因此, 我们说状态空间为  $E$  的一个随机序列是指该样本空间上的一个概率测度.

注意, 定义 4.1.2 针对一个随机序列, 而定义 4.1.3 针对一个转移函数. 实际上, 后者更具一般性. 确切地说, 我们可以抽取定义 4.1.2 中的马氏链 (叫做老马氏链) 的初始分布  $(\mu_x)$ , 与转移机制  $p$ , 得到定义 4.1.3 中的马氏链  $X$  (新马氏链), 然后定义

$$\mathbb{P}^\mu := \sum_{x \in E} \mu_x \mathbb{P}^x.$$

则在概率  $\mathbb{P}^\mu$  下的新马氏链与老马氏链同分布.

练习 4.1.3 证明: 在概率  $\mathbb{P}^\mu$  下,  $X$  的初始分布和转移函数分别是  $(\mu_x)$  和  $p$ .

现在我们叙述该马氏链的马氏性与强马氏性, 证明可复制随机游动一节中的相应定理. 用  $\mathcal{F}_n$  表示  $X_0, X_1, \dots, X_n$  生成的事件域, 它是离散的, 因此定理的性质 (2) 可以用条件期望表达

$$\mathbb{P}^x(X_{n+1} = y | \mathcal{F}_n) = p(X_n, y) = \mathbb{P}^{X_n}(X_1 = y).$$

该式相当于引理 2.5.2. 有了这个公式, 容易推出马氏链的马氏性与强马氏性. 类似地引入推移算子  $\theta_n, n \geq 0$ , 它满足对任何  $k \geq 0, X_k \circ \theta_n = X_{k+n}$ . 下面定理的证明参考定理 2.5.1 与定理 2.6.1.

定理 4.1.2 对任何非负或有界随机变量  $Y, n \geq 0, x \in E$ ,

$$\mathbb{E}^x(Y \circ \theta_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^{X_n}(Y).$$

上面的时间  $n$  可以用一类随机时间代替, 也就是强马氏性成立. 一个映射  $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  称为是一个停时, 如果对任何  $n \geq 0$ , 有  $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . 这等价于对任何  $n \geq 0, \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ . 注意,  $\tau$  可以取  $+\infty$  为值, 且一定是  $\mathcal{F}$  (广义) 随机变量. 容易验证固定时间  $n$  是一个停时. 定义  $\mathcal{F}_\tau$  是  $\mathcal{F}$  中满足对任何  $n \geq 0, A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  的元素  $A$  的全体, 那么 (1)  $\mathcal{F}_\tau$  是一个  $\sigma$ -代数; (2) 当  $\tau \equiv n$  时,  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n$ . (请读者自行验证.) 再定义停止位置  $X_\tau := X_n$  当  $\tau = n$  时,  $n \geq 0$ . 这样  $X_\tau$  在集合  $\{\tau < \infty\}$  上被定义, 且在此集合上是  $\mathcal{F}_\tau$  可测的. 类似定义  $\theta_\tau := \theta_n$  当  $\tau = n$  时. 同样  $\theta_\tau$  也在集合  $\{\tau < \infty\}$  上被定义.  $X$  有下面的强马氏性.

定理 4.1.3 设  $\tau$  是一个停时, 则对任何  $B \in \mathcal{F}, x \in E$  有

$$\mathbb{E}^x(1_B \circ \theta_\tau; \tau < +\infty | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}^{X_\tau}(1_B) 1_{\{\tau < +\infty\}}.$$

马氏链的例子很多, 在此列举若干, 同学可以自己举一些例子.

例 4.1.1 (Bernoulli-Laplace 扩散模型) 设  $A, B$  两箱中各有  $r$  个球, 其中  $r$  个白,  $r$  个黑. 记  $X_0$  是开始时  $A$  箱中白球个数, 然后各任取一球对换,  $X_n$  是经  $n$  次对换后  $A$  箱中白球个数.  $X = (X_n : n \geq 1)$  是随机序列, 状态空间是  $E = \{0, 1, 2, \dots, r\}$ . 容易验证  $X$  是马氏链且

$$p_{x, x-1} = \left(\frac{x}{r}\right)^2, \quad p_{x, x} = 2\frac{x(r-x)}{r^2}, \quad p_{x, x+1} = \left(\frac{r-x}{r}\right)^2.$$

这是一个关于两种液体混合的概率模型. ■

例 4.1.2 (无边界与有边界随机游动) 在第二章中讨论的简单随机游动是个马氏链, 是无边界的. 设状态空间  $E = \{0, 1, \dots, r\}$ , 当  $0 < x < r$  时像简单随机游动, 达到边界就停止游动:  $p(0, 0) = p(r, r) = 1$ , 该马氏链称为具有吸收边界的随机游动. 如果把边界的转移方式改为  $p_{0,1} = 1, p_{r,r-1} = 1$ , 那么它仍然是马氏链, 称为具有反射边界的随机游动. ■

例 4.1.3 (图上简单随机游动) 设  $E$  是一个简单图的顶点集合, 对任何  $x, y \in E$ , 若  $x, y$  有线直接连接, 则令  $S(x, y) = 1$  否则  $S(x, y) = 0$ . 则  $S$  是对称的. 设

$$p_{x,y} = \frac{S(x, y)}{\sum_{z \in E} S(x, z)},$$

那么  $(p_{x,y} : x, y \in E)$  定义了  $E$  上的一个转移函数, 对应的马氏链称为是图上的随机游动. 上例中的对称随机游动就是整数格点图上的随机游动. 状态空间  $\{0, 1, \dots, r\}$  作为整数格点的子图上的随机游动恰是具有反射边界的对称随机游动. 特别地, 设  $E$  是  $\mathbf{R}^d$  上的整数格点按自然方式连接的图, 该图上简单随机游动就是整数格点上对称随机游动. 任意顶点有  $2d$  个邻居, 转移到邻居的概率是  $\frac{1}{2d}$ , 称为  $d$ -维简单对称随机游动, 也称为  $d$ -维格点图上的简单随机游动. 注意图上的简单随机游动是被图所唯一决定的, 不会混淆. ■

下面我们将主要讨论马氏链或者说转移函数的性质. 现在给定转移函数  $(p_{x,y})$  与对应的马氏链,  $X = (X_n), (\mathbb{P}^x)$ . 记  $n$  步转移概率  $p_{x,y}^{(n)} := \mathbb{P}^x(X_n = y)$ ,  $n \geq 0$ ,  $x, y \in E$ . 显然  $p_{x,y}^{(0)} = 1_{\{x=y\}}$ ,  $p^{(1)} = p$ .

引理 4.1.1 (Chapman-Kolmogorov) 对任何  $n, m \geq 0, x, y \in E$  有

$$p_{x,y}^{(n+m)} = \sum_{z \in E} p_{x,z}^{(n)} p_{z,y}^{(m)},$$

即作为矩阵  $p^{(n)}$  是  $p$  的  $n$  次幂:  $p^{(n)} = p^n$ .

定义 4.1.4 设  $x, y \in E$ , 称  $x$  可达  $y$ , 如果存在  $n \geq 0$ , 使  $p_{x,y}^{(n)} > 0$ ; 称  $x, y$  互达, 如果  $x$  可达  $y$  且  $y$  可达  $x$ . 称  $X$  不可分, 如果任何两个状态可互达.

显然  $x$  可达  $x$ . 另外如果  $x$  可达  $y$ , 且  $y$  可达  $z$ , 则  $x$  可达  $z$ . 事实上, 有条件, 存在  $n, k \geq 0$  使得  $p_{x,y}^{(n)} \geq 0, p_{y,z}^{(k)} \geq 0$ , 然后

$$p_{x,z}^{(n+k)} = \sum_u p_{x,u}^{(n)} p_{u,z}^{(k)} \geq p_{x,y}^{(n)} p_{y,z}^{(k)} > 0.$$

状态间互达关系是等价关系.

练习 4.1.4 设  $x \neq y$ .

1. 证明:  $x$  可达  $y$  当且仅当存在  $n \geq 1$ ,  $x_i \in E$ ,  $0 \leq i \leq n$  使得  $p_{x_{i-1}, x_i} > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  且  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$ .
2. 证明: 如果  $|E| < \infty$ , 且  $x$  可达  $y$ , 则存在  $n < |E|$  使得  $p_{x,y}^{(n)} > 0$ .

对  $y \in E$ , 令  $\tau_y := \inf\{n \geq 1 : X_n = y\}$  (约定  $\inf \emptyset = \infty$ ), 称为是状态  $y$  的首中时. 容易验证  $\tau_y$  是一个停时, 即对任何  $n$  有  $\{\tau_y \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . 这是一个非常基本的停时, 有许多性质和应用. 对  $n \geq 0$ , 令  $f_{x,y}^{(n)} := \mathbb{P}^x(\tau_y = n)$ , 显然  $f_{x,y}^{(n)} \leq p_{x,y}^{(n)}$ . 因为  $\{\tau_y = k\} \in \mathcal{F}_k$ ,  $X_{\tau_y} = y$ , 故对  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} p_{x,y}^{(n)} &= \mathbb{P}^x(X_n = y) = \mathbb{P}^x(X_n = y, \tau_y \leq n) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^x(X_{n-k} \circ \theta_k = y, \tau_y = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_k}(X_{n-k} = y); \tau_y = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}^x(\tau_y = k) \mathbb{P}^y(X_{n-k} = y) = \sum_{k=1}^n f_{x,y}^{(k)} p_{y,y}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

这是我们前面所提到的首达概率公式.

定理 4.1.4 对  $n \geq 1$ ,  $x, y \in E$ , 有

$$p_{x,y}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{x,y}^{(k)} p_{y,y}^{(n-k)}.$$

再定义

$$f_{x,y} := \mathbb{P}^x(\tau_y < \infty) = \sum_{n \geq 1} f_{x,y}^{(n)},$$

这是过程从状态  $x$  经有限步到达  $y$  的概率.

练习 4.1.5 证明: 当  $x \neq y$  时,  $x$  可达  $y$  当且仅当  $f_{x,y} > 0$ .

练习 4.1.6 设  $\lim_n p_{x,x}^{(n)}$  存在且非零, 证明极限是平均回归时  $\mathbb{E}^x \tau_x$  的倒数.

练习 4.1.7 证明两个公式 (1) 对任何  $x, y \in E$ ,

$$f_{x,y} \sum_{n=0}^{\infty} p_{y,y}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{x,y}^{(n)}.$$

$$(2) f_{x,y}^{(n+1)} = \sum_{z \neq y} p_{x,z} f_{z,y}^{(n)}.$$

## 4.2 常返态与暂留态

**定义 4.2.1** 一个状态  $x \in E$  称为是常返的, 如果从  $x$  出发以概率 1 回到  $x$ , 即  $f_{x,x} = 1$ , 否则  $x$  称为暂留的. 马氏链称为是常返的, 如果其所有状态常返; 称为暂留, 如果其所有状态暂留.

**例 4.2.1** 考虑简单随机游动. 已知对任何状态  $x$ ,  $\mathbb{P}^x(\tau_x < \infty) = 1 - |p - q|$ . 因此对称时任何状态常返, 非对称时任何状态暂留. 对例 4.1.2 中的有吸收边界的随机游动, 容易验证从任何状态  $0 < i < r$  出发,  $X$  总在有限步内达到 0 或  $r$ , 然后不再离开. 因此, 状态 0,  $r$  常返, 而其他状态暂留. ■

对  $y \in E$ , 令

$$\tau^{(0)} := 0, \tau_y^{(k)} := \tau_y + \tau_y^{(k-1)} \circ \theta_{\tau_y}, k \geq 1.$$

那么  $\tau^{(k)}$  实际上是  $X$  第  $k$  次访问  $y$  的时刻, 它也是一个停时. 由强马氏性

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(\tau_y^{(k)} < \infty) &= \mathbb{P}^x(\tau_y < \infty, \tau_y^{(k-1)} \circ \theta_{\tau_y} < \infty) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X(\tau_y)}(\tau_y^{(k-1)} < \infty); \tau_y < \infty) \\ &= f_{x,y} \mathbb{P}^y(\tau_y^{(k-1)} < \infty) = \cdots = f_{x,y} f_{y,y}^{k-1}. \end{aligned}$$

**引理 4.2.1** 对任何  $x, y \in E$ ,  $k \geq 1$  有

$$\mathbb{P}^x(\tau^{(k)} < \infty) = f_{x,y} f_{y,y}^{k-1}.$$

**定理 4.2.1** 我们有下列准则.

- (1) 状态  $x$  是常返的等价于  $\mathbb{P}^x(\overline{\lim}_n \{X_n = x\}) = 1$  也等价于  $\sum_n p_{x,x}^{(n)} = \infty$ ;
- (2) 状态  $x$  是暂留的等价于  $\mathbb{P}^x(\overline{\lim}_n \{X_n = x\}) = 0$  也等价于  $\sum_n p_{x,x}^{(n)} < \infty$ .

**证明.** 首先由上面的引理, 当  $y = x$  时

$$\mathbb{P}^x(\overline{\lim}_n \{X_n = x\}) = \lim_k (f_{x,x})^k = \begin{cases} 0, & f_{x,x} < 1, \\ 1, & f_{x,x} = 1. \end{cases}$$

由首达概率公式以及下面的练习推出  $f_{x,x} < 1$  当且仅当  $\sum_n p_{x,x}^{(n)} < \infty$ . □

练习 4.2.1 设有两个非负数列  $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$  满足  $a_0 = 1$ , 对任何  $n \geq 1$ ,  $a_n = \sum_{k=1}^n b_k a_{n-k}$ . 证明:  $\sum_n b_n < 1$  当且仅当  $\sum_n a_n < \infty$ .

定理 4.2.2 如果  $x, y \in E$  是互达的, 则下列两者之一成立.

(1)  $x, y$  都是常返的,  $\mathbb{P}^x(\overline{\lim}_n \{X_n = y\}) = 1$  且  $\sum_n p_{x,y}^{(n)} = \infty$ .

(2)  $x, y$  都是暂留的,  $\mathbb{P}^x(\overline{\lim}_n \{X_n = y\}) = 0$  且  $\sum_n p_{x,y}^{(n)} < \infty$ .

证明. 因  $x, y$  互达, 存在  $i, j \geq 1$  使得  $p_{x,y}^{(i)} \cdot p_{y,x}^{(j)} > 0$ , 而对任何  $n \geq 1$ ,

$$p_{x,x}^{(i+n+j)} \geq p_{x,y}^{(i)} p_{y,y}^{(n)} p_{y,x}^{(j)}, \quad p_{y,y}^{(i+n+j)} \geq p_{y,x}^{(i)} p_{x,x}^{(n)} p_{x,y}^{(j)},$$

因此定理 4.2.1 推出  $x, y$  或都是常返或都是暂留. 由首达概率公式推出

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_{x,y}^{(n)} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_{x,y}^{(k)} p_{y,y}^{(n-k)} t^n \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{x,y}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} p_{y,y}^{(n-k)} = f_{x,y} \sum_{n=1}^{\infty} p_{y,y}^{(n)}. \end{aligned}$$

因此它当  $y$  常返时是无穷, 否则是有限. 再由引理 4.2.1

$$\mathbb{P}^x(\overline{\lim}_n \{X_n = y\}) = f_{x,y} \mathbb{P}^y(\overline{\lim}_n \{X_n = y\}),$$

最后我们仅需验证当  $x, y$  常返时有  $f_{x,y} = 1$ .

事实上, 设  $y$  常返, 从  $y$  出发会无穷多次回到  $y$ , 直观地有任何时间  $k \geq 1$  之后一定还会访问  $y$ , 即  $\mathbb{P}^y(\tau_y \circ \theta_k < \infty) = 1$ , 故由马氏性得

$$\begin{aligned} p_{y,x}^{(k)} &= \mathbb{P}^y(X_k = x) = \mathbb{P}^y(X_k = x, \tau_y \circ \theta_k < \infty) \\ &= \mathbb{E}^y(\mathbb{P}^{X_k}(\tau_y < \infty); X_k = x) = f_{x,y} p_{y,x}^{(k)}. \end{aligned}$$

由  $y$  可达  $x$  推出  $f_{x,y} = 1$ . □

推论 4.2.1 如果  $y$  常返且  $y$  可达  $x$ , 则  $x$  可达  $y$ .

定理断言两个互达的状态, 或者都常返或者都暂留, 属于同一类, 这样的性质叫做类性质.

练习 4.2.2 严格地证明: 如果  $y$  常返, 则对任何  $k$  有  $\mathbb{P}^y(\tau_y \circ \theta_k < \infty) = 1$ .



练习 4.2.3 证明: (1) 有限状态马氏链至少有一个状态是常返的. (2) 不可分有限状态马氏链必是常返的.

定理 4.2.3 (Polya)  $d$ -维对称简单随机游动当  $d = 1, 2$  时是常返的, 而当  $d \geq 3$  时是暂留的.

证明. 用  $(S_n)$  表达该简单随机游动. 随机游动是不可分的. 令  $u_{2n}^{(d)} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ .  $d = 1$  的情况已在例 4.2.1 中证明. 当  $d = 2$  时, 偶数  $2n$  返回零必定是  $k$  步向上,  $k$  步向下,  $n - k$  步向左,  $n - k$  步向右, 因此

$$\begin{aligned} u_{2n}^{(2)} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \\ &= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 \sim \frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

推出  $\sum_n u_n^{(2)} = \infty$ , 故而常返. 对  $d \geq 3$  的情况留作习题.  $\square$

练习 4.2.4 设  $X^{(d)}$  是  $d$ -维格点图上零点出发的简单随机游动,  $\tau^{(d)}$  是它首中 0 的时间.

1.  $d + 1$  维随机游动在  $d$  维空间上的投影在抹去它不动的时间之后是  $d$  维随机游动. 确切地说, 用  $(Y_n)$  表示  $X^{(d+1)}$  的前  $d$ -个坐标组成的随机序列. 定义

$$\sigma = \inf\{n \geq 1 : Y_n \neq Y_{n-1}\},$$

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_n = \sigma \circ \theta_{\sigma_{n-1}} + \sigma_{n-1}, n > 1,$$

$\sigma_n$  是  $Y$  的第  $n$  次变动. 证明:  $(Y_{\sigma_n})$  与  $(X_n^{(d)})$  同分布.

2. 证明:

$$\mathbb{P}^0(\tau^{(d+1)} < \infty) \leq \mathbb{P}^0(\tau^{(d)} < \infty).$$

3. 证明: 当  $d \geq 3$  时,  $d$ -维对称简单随机游动暂留.

提示: 有很多方法可以证明  $\sum u_{2n}^{(3)} < \infty$ . 一个是用组合方法写成下面的形式

$$u_{2n}^{(3)} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \left( \frac{1}{3^n} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} \right)^2,$$

进行估计. 这里提供  $u_{2n}^{(3)}$  的另一种表达, 可能由此可以估计出它收敛到零的阶. 因为  $(S_n)$  是独立随机序列的部分和序列, 所以利用 Fourier 变换和逆变换公式, 推出

$$u_{2n}^{(3)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} \left( \frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3}{3} \right)^{2n} dx_1 dx_2 dx_3.$$

练习 4.2.5 设  $X^{(j)} = (X_n^{(j)}), 1 \leq j \leq d$ , 是  $d$  个独立对称简单随机游动, 令  $X = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)})$ . 证明  $X$  是一个马氏链. 求它的状态空间与转移函数. 证明  $X$  当  $d \leq 2$  时常返,  $d \geq 3$  时暂留. 思考是否可以利用它来证明 Polya 定理 (\*).

练习 4.2.6 设  $X$  是平面格点图上的随机游动, 它向上下左右的转移概率分别是  $p_1, p_2, p_3, p_4$ , 它们是和为 1 的正数. 证明: 当  $p_1 \neq p_2$  或者  $p_3 \neq p_4$  时,  $X$  是暂留的. 思考: (1) 否则怎么样? (2) 考虑三维时的类似问题.

一般马氏链的状态是非常复杂的, 互达是个等价关系, 但是互达等价类不是一个好的分类, 下面再介绍两个概念, 它们在状态分类的时候是有用的.

定义 4.2.2 设  $(p_{x,y})$  是  $E$  上转移函数.

1. 子集  $C \subset E$  称为是闭的, 如果对任何  $x \in C$ , 有  $\sum_{y \in C} p_{x,y} = 1$ .
2. 两个状态  $x, y$  称为相邻的, 如果  $p_{x,y} > 0$  或者  $p_{y,x} > 0$ ; 称为连通的, 如果存在路径  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ , 依次相邻, 即  $x_{j-1}$  与  $x_j$  相邻. 连通分支是指一个连通等价类.

显然, 如果  $C$  是闭的, 那么转移函数限制在  $C$  上仍然是转移函数. 互达等价类是连通的但未必是闭的.

练习 4.2.7 证明: (1)  $C$  是闭的等价于对任何  $x \in C, y \notin C$ , 有  $p_{x,y} = 0$ . (2) 状态  $x$  可达的状态全体是闭的且连通的. (3) 常返态  $x$  可达的状态全体是不可分的. (4) 举例说明暂留状态全体不一定是闭的. (5)  $X$  不可分当且仅当  $E$  没有非平凡闭子集. (6) 一个连通分支是闭的, 但闭集未必是连通的.

### 4.3 正常返与遍历性

常返是指首中时是有限的, 为了进一步区别常返的类型, 我们引入正常返与零常返的概念.

**定义 4.3.1** 设状态  $y$  是常返的, 称它是正常返的, 如果平均回转时间有限

$$\mathbb{E}^y(\tau_y) = \sum_{n \geq 1} n f_{y,y}^{(n)} < \infty,$$

否则称  $y$  是零常返的.

前面, 我们证明了一维格点上的对称简单随机游动是常返的, 但平均返回时间是无穷, 因此是零常返的.

**练习 4.3.1** 证明二维整数格点图上的简单随机游动是零常返的.

**例 4.3.1** 设  $E$  是非负整数集, 令

$$\mathbb{P} := \begin{bmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & 0 & p_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

其中  $p_x, q_x$  是正的, 且  $p_x + q_x = 1$ , 因此  $\mathbb{P}$  是一个转移矩阵. 设  $X$  是一个以  $\mathbb{P}$  为转移矩阵的马氏链, 容易验证  $X$  是不可分的. 对  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}^0(\tau_0 > n) = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}.$$

因此  $X$  常返当且仅当  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1} = 0$ . 因为  $\mathbb{E}^0 \tau_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_0 > n)$ , 所以上述马氏链的 0 点是正常返的当且仅当级数  $\sum_{n=1}^{\infty} p_0 p_1 \cdots p_{n-1}$  收敛. ■

**练习 4.3.2** 上例中, 设  $p_n = e^{-1/n^\alpha}$ , 证明: 当  $\alpha > 1$  时, 马氏链是暂留的; 当  $\alpha = 1$  时, 马氏链是零常返的; 当  $\alpha < 1$  时正常返.

**练习 4.3.3** 继续上例, 求状态 1 的平均返回时间  $\mathbb{E}^1 \tau_1$ .

众所周知, 一个周期地发生的事件, 频率等于周期的倒数. 当  $x$  是常返态时, 访问  $x$  差不多就是一个周期地发生的事件, 所以其频率应该是周期的倒数. 什么是频

率呢? 频率是单位时间内访问  $x$  的次数, 即

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=x\}},$$

下面定理断言频率和频率的期望有相同的极限, 极限是平均回归时的倒数. 显然, 定理的结论当  $x$  是暂留的时候也是对的.

**定理 4.3.1** 对常返态  $x \in E$ , 有

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=x\}} = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{x,x}^{(k)} = \frac{1}{\mathbb{E}^x \tau_x},$$

其中第一个极限是  $\mathbb{P}^x$  几乎处处的意义下. 另外, 右边的量记为  $\mu_x$ , 当分母是无穷时等于 0.

令  $S_n = \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=x\}}$ , 它是 1 到  $n$  时刻,  $X$  访问  $x$  的次数, 那么

$$\sum_{k=1}^n p_{x,x}^{(k)} = \mathbb{E}^x S_n.$$

用  $T_n$  表示  $X$  第  $n$  访问  $x$  的时间,  $T_0 = 0$ ,

$$\xi_n := T_n - T_{n-1} = \tau_x \circ \theta_{T_{n-1}}.$$

显然  $\xi_1 = T_1 = \tau_x$ .

**引理 4.3.1** 在概率  $\mathbb{P}^x$  下,  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  是独立同分布随机序列.

证明. 这里仅验证  $\xi_1, \xi_2$  独立同分布, 一般情况请学生自己完成. 对任何  $j, k$ , 由马氏性推得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^x(\xi_1 = j, \xi_2 = k) &= \mathbb{P}^x(T_1 = j, \tau_x \circ \theta_j = k) \\ &= \mathbb{E}^x(\mathbb{P}^{X_j}(\tau_x = k), T_1 = j) \\ &= \mathbb{P}^x(\tau_x = k) \mathbb{P}^x(\tau_x = j). \end{aligned}$$

这验证了独立同分布性质. □

显然对  $n \geq 1, k \geq 0$  有  $\{S_n = k\} = \{T_k \leq n < T_{k+1}\}$ . 因此

$$T_{S_n} \leq n < T_{S_n+1}.$$

这推出

$$\frac{S_n}{T_{S_n+1}} < \frac{S_n}{n} \leq \frac{S_n}{T_{S_n}}.$$

因为  $T_n$  是独立同分布非负随机变量之和, 所以由强大数定律  $T_n/n$  几乎处处趋于  $\mathbb{E}^x \tau_x$ , 不论该期望是有限或者无限. 再加上常返性,  $S_n$  几乎处处趋于无穷, 因此, 根据下面的练习题,  $S_n/n$  几乎处处的极限是  $\mu_x$ , 再由控制收敛定理推出

$$\lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}^x S_n = \mu_x.$$

这证明了上面的定理.

练习 4.3.4 设  $Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$ , 正整数值随机序列  $\tau_n$  几乎处处趋于无穷. 证明:  $Y_{\tau_n} \xrightarrow{\text{a.s.}} Y$ .

练习 4.3.5 对  $x, y \in E$ , 应用首达概率公式证明

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{x,y}^{(k)} = f_{x,y} \mu_y.$$

从定理可以看出, 状态  $x$  正常返当且仅当

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{x,x}^{(k)} > 0.$$

如果  $x, y$  互达, 存在非负整数  $s, t$  使得  $p_{x,y}^{(s)} > 0$  与  $p_{y,x}^{(t)} > 0$ . 因此

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{x,x}^{(s+k+t)} \geq p_{x,y}^{(s)} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{y,y}^{(k)} \right) p_{y,x}^{(t)}.$$

由此推出平均极限或者都是正的或者都是零, 即有下面的推论.

推论 4.3.1 正常返性也是类性质.

练习 4.3.6 设  $X$  是不可分常返马氏链. 证明: 平均极限  $(\mu_y)$  满足  $\sum_y \mu_y \leq 1$  且  $\sum_x \mu_x p_{x,y} = \mu_y$ ,  $y \in E$ , 即若  $(\mu_y)$  非零, 则它是转移矩阵的特征值 1 的特征向量.

练习 4.3.7 证明: 有限状态马氏链没有零常返态.

注意, 尽管平均极限总是存在, 但  $p_{y,y}^{(n)}$  的极限未必存在. 例如当  $E = \{x, y\}$ ,  $p_{x,y} = p_{y,x} = 1$  时,

$$p_{x,x}^{(n)} = p_{y,y}^{(n)} = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

因此平均极限是  $1/2$  而本身极限不存在. 极限不存在的根本原因是周期问题, 即该马氏链总是要偶数步才能回来.

练习 4.3.8 设  $E = \{0, 1\}$ ,  $(p_{x,y})$  是转移函数.

1. 验证:  $p_{0,0}^{(n)} = p_{1,0} + (p_{0,0} - p_{1,0})p_{0,0}^{(n-1)}$ ;
2. 写出  $p_{0,0}^{(n)}$  的表达式并求出极限;
3. 求出  $p_{x,y}^{(n)}$  及其极限.

练习 4.3.9 定义状态  $x$  的周期

$$d(x) := \gcd\{n \geq 1 : p_{x,x}^{(n)} > 0\}.$$

当  $d(x) = 1$  时称  $x$  非周期.

1. 证明: 如果  $x$  与  $y$  互达, 则  $d(x) = d(y)$ .
2. 设马氏链不可分且  $E$  有限. 证明:  $|E|$  是周期的整数倍
3. 证明: 如果  $x$  非周期, 那么存在正整数  $k$  当  $n > k$  时,  $p_{x,x}^{(n)} > 0$ .

前面一个练习中我们说当  $\lim_n p_{x,x}^{(n)}$  存在时, 它的极限是平均返回时的倒数, 但是并没有说什么时候极限存在. 现在不加证明地给出一个结论: 对常返态  $x \in E$ , 如果它非周期, 则  $\lim_n p_{x,x}^{(n)}$  存在.

练习 4.3.10 证明: 如果上面的结论成立, 那么对任何  $d = d(x) > 1$ ,  $\lim_n p_{x,x}^{(nd)}$  存在. 这时的极限是什么?

## 4.4 不变测度与平稳分布

在本节中, 我们将介绍与正常返性质密切相关的不变测度与平稳分布.  $E$  上的一个测度等同于  $E$  上一个非负 (可能取值无穷) 函数  $\mu = (\mu_x)$ ,  $E$  上的一个  $\sigma$ -有限测度等同于一个非负函数. 讲义中所说的可数集上的测度总是指  $\sigma$ -有限测度. 说测度  $\mu$  非零或者非平凡是指不恒等于零.

定义 4.4.1  $E$  上的一个非零测度  $\mu = (\mu_y : y \in E)$  称为是转移矩阵  $P$  的或者对应的马氏链的不变测度, 如果

$$\sum_{x \in E} \mu_x p_{x,y} = \mu_y, \quad y \in E.$$

如果不变测度  $\mu$  是一个概率分布, 那么我们说它是平稳分布.

练习 4.4.1 1. 设有  $0 \leq \mu_x \leq +\infty$ ,  $x \in E$ , 满足  $\sum_{x \in E} \mu_x p_{x,y} \leq \mu_y$ ,  $y \in E$ , 证明: 如果马氏链不可分, 那么只要有一个  $\mu_x \in (0, \infty)$ , 则所有的都是如此.

2. 一个满足以上条件的非零测度  $(\mu_x)$  称为过分测度. 不变测度是过分测度. 证明: 如果  $E$  有限, 那么过分测度是不变测度.

练习 4.4.2 求整数格点上简单 (对称与非对称) 随机游动的不变测度. 由此证明: 对称时不变测度唯一, 非对称时有无穷多, 这些不变测度都是无限的.

引理 4.4.1 一个不可分且有平稳分布的马氏链  $X$  是常返的.

证明. 设  $\mu$  是平稳分布. 由平稳分布的定义, 对任何  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{x \in E} \mu_x p_{x,y}^{(n)} = \mu_y, \quad y \in E.$$

假设  $X$  是暂留的, 则  $\lim_n p_{x,y}^{(n)} = 0$ , 由控制收敛定理, 对任何  $y \in E$ ,  $\mu_y = 0$ , 矛盾.  $\square$

最后我们简单介绍马氏链的不变测度的存在唯一性. 从不变测度定义可以看出, 不变测度的常数倍仍然是不变测度, 因此两个相差常数倍的不变测度通常认为是相同的, 唯一性是指在常数倍不计的意义下唯一.

定理 4.4.1 不可分常返的马氏链的不变测度存在而且唯一.

证明. 设  $X$  是不可分常返马氏链, 具有转移概率  $(p_{x,y})$ . 先证明存在性, 任取点  $o \in E$ ,  $\tau := \inf\{n \geq 1 : X_n = o\}$ , 对任何  $x \in E$ , 定义禁忌概率  $q_{o,x}^{(n)} := \mathbb{P}^o(X_n = x, n \leq \tau)$ ,  $n \geq 1$ , 它是  $X_n = x$  且  $n$  之前未返回  $o$  的概率. 再定义

$$\mu_x := \sum_{n \geq 1} q_{o,x}^{(n)} = \mathbb{E}^o \left[ \sum_{n=1}^{\tau} 1_{\{X_n=x\}} \right].$$

下证  $(\mu_x)$  就是  $X$  的不变测度. 直观看,  $\mu_x$  是从  $o$  出发首次返回  $o$  这段时间马氏链访问  $x$  的平均次数.

首先  $X$  常返蕴含着  $\mu_o = 1$ . 其次  $\{\tau \geq n\} = \{\tau < n\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$ , 由马氏性, 当  $n \geq 1$  时,

$$q_{o,x}^{(n)} = \mathbb{P}^o(X_1 \circ \theta_{n-1} = x; n \leq \tau)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}^o(\mathbb{P}^{X_{n-1}}(X_1 = x); n \leq \tau) \\
&= \sum_y \mathbb{P}^o(\{X_{n-1} = y, n \leq \tau\}) p_{y,x}, \tag{4.4.1}
\end{aligned}$$

对  $n$  求和得

$$\mu_x = \sum_y \sum_{n=1}^{\tau} \mathbb{P}^o(\{X_{n-1} = y\}) p_{y,x} = \sum_y \mu_y p_{y,x},$$

其中第二个等号来自观察: 0 到  $\tau-1$  间访问  $y$  的次数与 1 到  $\tau$  间访问  $y$  的次数一致. 这证明了  $(\mu_x)$  是  $X$  的不变测度.

下面证明唯一性, 设  $(\nu_x : x \in E)$  也是  $X$  的非零不变测度, 则它们都是正的. 定义关于  $(\nu_x)$  对偶的转移概率

$$\hat{p}_{x,y} := \frac{\nu_y}{\nu_x} p_{y,x}, \quad x, y \in E.$$

由不变测度的性质推出  $(\hat{p}_{x,y} : x, y \in E)$  也是转移函数, 对应的马氏链也实现在同样的样本空间和随机序列  $(X_n)$  上, 对应的概率记为  $(\hat{\mathbb{P}}^x)$ , 称为对偶马氏链, 对应的量用  $\hat{\cdot}$  表示. 显然对任何  $n \geq 1$ ,

$$\hat{p}_{x,y}^{(n)} = \frac{\nu_y}{\nu_x} p_{y,x}^{(n)},$$

且  $\hat{p}_{x,x}^{(n)} = p_{x,x}^{(n)}$ . 因此对偶马氏链也是不可分常返的.

任取点  $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ , 重复地使用  $\nu_x \hat{p}_{x,y} = \nu_y p_{y,x}$ , 得

$$\nu_x \hat{p}_{x,x_1} \cdots \hat{p}_{x_{n-1},y} = \nu_y p_{y,x_{n-1}} \cdots p_{x_1,x},$$

用概率的语言表达, 即

$$\nu_x \hat{\mathbb{P}}^x(X_j = x_j, 0 < j < n, X_n = y) = \nu_y \mathbb{P}^y(X_{n-j} = x_j, 0 < j < n, X_n = x), \tag{4.4.2}$$

这样的逆转关系可以通过逆转算子表示. 取  $y = o$ , 进而推出

$$\nu_x \hat{\mathbb{P}}^x(X_j \neq o, 0 < j < n, X_n = o) = \nu_o \mathbb{P}^o(X_j \neq o, 0 < j < n, X_n = x), \tag{4.4.3}$$

因为  $\{n \leq \tau\} = \{X_j \neq o, 0 < j < n\}$ , 所以

$$\nu_x \hat{f}_{x,o}^{(n)} = \nu_x \hat{\mathbb{P}}^x(n \leq \tau, X_n = o) = \nu_o \mathbb{P}^o(n \leq \tau, X_n = x) = \nu_o q_{o,x}^{(n)}. \tag{4.4.4}$$

现在两边对  $n$  求和, 由常返性推出右边等于  $\nu_x$ , 左边由定义等于  $\nu_o \cdot \mu_x$ , 从而  $\nu_x = \nu_o \cdot \mu_x$  对任何  $x \in E$  成立, 证明了唯一性. 这里利用时间逆转将禁忌概率联系到首中概率的思想不仅漂亮而且直观.  $\square$



练习 4.4.3 定义逆转算子  $r_n: X_k \circ r_n := X_{n-k}, 0 < k < n$ , 证明: 对任何  $B \in \sigma(X_1, \dots, X_{n-1})$ ,  $x, y \in E$ , 有

$$\nu_x \hat{\mathbb{P}}^x(B, X_n = y) = \nu_y \mathbb{P}^y(r_n^{-1}B, X_n = x),$$

且  $r_n^{-1}\{n \leq \tau\} = \{n \leq \tau\}$ . 由此推出 (4.4.4).

练习 4.4.4 证明: 不可分马氏链一定存在过分测度.

定理证明中所定义的测度  $(\mu_x)$  是  $X$  唯一的不变测度, 因此  $\sum_x \mu_x = \mathbb{E}^o \tau$  且  $\mu_o = 1$ . 如果  $X$  有一个状态是正常返, 那么该不变测度有限, 即平稳分布存在唯一. 反之, 如果平稳分布  $(\pi_x)$  存在, 则存在  $c > 0$  使得  $\mu_x = c\pi_x$ . 从而推出  $\mathbb{E}^o \tau < \infty$ , 即  $o$  是正常返的, 由  $o$  的任意性, 所有状态都是正常返的. 另外, 由  $\mu_o = 1$  推出  $\pi_o = 1/\mathbb{E}^o \tau$ .

推论 4.4.1 不可分常返马氏链  $X$  有下面结论.

1. 或者所有状态都是正常返的或者都是零常返的.
2. 它是正常返的当且仅当它有平稳分布. 这时平稳分布为  $\pi_x = 1/\mathbb{E}^x \tau_x, x \in E$ .

例 4.4.1 继续例 4.3.1. 解方程  $(\mu_x : x \geq 0)\mathbb{P} = (\mu_x : x \geq 0)$ , 其中  $\mathbb{P}$  是转移矩阵. 得

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sum_{x \geq 0} \mu_x q_x; \\ \mu_x &= \mu_{x-1} p_{x-1}, x \geq 1. \end{aligned}$$

将  $\mu_x$  代入第一个方程得

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_0(q_0 + p_0 q_1 + \dots + p_0 \dots p_{x-1} q_x + \dots) \\ &= \mu_0(1 - \lim_x p_0 p_1 \dots p_x), \end{aligned}$$

推出当  $\lim_x p_0 p_1 \dots p_x = 0$  方程有非零解, 不变测度存在; 而当该极限为正, 方程无解, 不变测度不存在. 因此, 对该马氏链, 常返当且仅当不变测度存在. 当  $\sum_x p_0 p_1 \dots p_{x-1} < \infty$  时正常返, 这时平稳分布为

$$\pi_x = \frac{p_0 p_1 \dots p_{x-1}}{1 + p_0 + p_0 p_1 + \dots + p_0 p_1 \dots p_{x-1} + \dots}, x \geq 0.$$

这说明平均返回时为

$$\mathbb{E}^x \tau_x = \frac{1 + p_0 + p_0 p_1 + \cdots + \cdots}{p_0 p_1 \cdots p_{x-1}}, \quad x \geq 0,$$

其中上式分母当  $x = 0$  时为 1.

练习 4.4.5 设状态 1,2,3,4,5,6,7 的马氏链的转移矩阵为

$$\mathbb{P} := \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

问其中包含哪些闭子集? 哪些不可分的闭子集? 写出各状态是常返还是暂留的, 以及每个常返态的平均返回时.

练习 4.4.6 证明:

1. 直线与平面格点上对称简单随机游动是零常返的.
2. 有限状态不可分马氏链是正常返的.
3. 有限状态马氏链有平稳分布.

练习 4.4.7 设  $X$  是转移函数为  $p_{x,y}$  的马氏链. 对任何  $x \in E$ , 定义

$$M_n := \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i=y\}} - \sum_{x \in E} \left( \sum_{i=1}^n 1_{\{X_{i-1}=x\}} \right) \cdot p_{x,y},$$

证明: (1) 对任何  $o \in E$ ,  $(M_n : n \geq 1)$  是  $\mathbb{P}^o$  鞅. (2) 将 Doob 有界停止定理应用于  $(M_n)$  证明不可分常返的  $X$  有不变测度.

练习 4.4.8 甲袋中有 3 个黑球, 乙袋中有 3 个白球, 每次从两袋中各任取一球, 交换放入另一袋中, 用  $X_n$  表示交换  $n$  次后甲袋中的黑球个数. 证明  $(X_n)$  是马氏链, 并写出其转移矩阵以及平稳分布.

练习 4.4.9 某人有  $r$  把伞放在家或者办公室用于来往于家与办公室之间, 当且仅当天下雨且该场所有伞时, 带一把伞走, 到达后放下. 下雨的概率等于  $p$ .

1. 用  $X_n$  表示他第  $n$  出 (家或者办公室) 门时手边的伞的数目, 说明它是一个马氏链, 写出其转移概率. 它是否有平稳分布? 如有, 求其平稳分布.
2. 计算他第  $n$  出门时被淋湿的概率当  $n$  趋于无穷时的极限.
3. 证明: 对任何  $p$ , 5 把伞可以保证他以 95% 以上的概率不被淋湿.

练习 4.4.10 依次等可能地往  $M$  个盒子里放球,  $\xi_n$  表示放入第  $n$  个球后空盒的个数. 证明  $\{\xi_n\}$  是马氏链并写出它的转移函数.

练习 4.4.11 设  $\{\xi_n\}$  是整数值的独立同分布非常数随机序列, 分布为  $(p_x : x \in \mathbf{Z})$ , 令  $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . (1) 证明:  $(X_n)$  是马氏链; (2) 求其转移函数; (3) 问  $(p_x)$  满足什么条件时, 该马氏链 (转移函数) 是不可分的? (4) 证明:  $X$  不可能有平稳分布. 因此它不可能是正常返的.

练习 4.4.12 设  $X$  是不可分常返马氏链, 任取有限集  $A \subset E$ , 定义  $\sigma$  是  $A$  的首中时,  $\sigma_n$  是第  $n$  次命中  $A$  的时间, 也就是说

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \sigma \circ \theta_{\sigma_{n-1}}.$$

令  $Y_n := X(\sigma_n)$ . 证明: (1)  $Y$  是以  $A$  为状态空间的不可分常返马氏链 (事实上是  $X$  的一个时间变换, 称为是  $X$  在  $A$  上的迹). (2) 如果  $(\mu_x : x \in E)$  是  $X$  的不变测度, 证明它在  $A$  上的限制  $(\mu_x : x \in A)$  是  $Y$  的不变测度.

## 4.5 可逆马氏链与电路图

可逆马氏链也称为对称马氏链, 是指具有对称测度的马氏链, 它是一个数学对象. 电路图是大家熟知的物理对象, 本节把这两者联系起来, 来物理定律来计算数学中的量, 说明马氏链也是自然产生的概念. 本节内容主要参考 [4] 和 [2].

设  $X = \{X_n : n \geq 0\}$  是状态空间  $S$  上的一个马氏链, 转移函数为  $(p(x, y))$ . 注意这里我们使用  $p(x, y)$  代替  $p_{x, y}$ , 只是为了让符号更协调一些. 说一个转移函数对称是指对任何  $x, y$  有  $p(x, y) = p(y, x)$ . 按照这个定义, 整数格点上的对称随机游动是对称的. 让我们更一般地, 引入转移函数关于一个测度对称的概念, 也称为可逆.

**定义 4.5.1** 如果存在  $S$  上的严格正的测度  $\pi$ , 使得对任何  $x, y \in S$ ,  $\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$ , 那么称  $X$  或其转移函数是  $S$  上可逆 (或者  $\pi$ -对称) 的,  $(\pi(x) : x \in S)$  称为是对称测度.

**练习 4.5.1** 如果定义中的  $\pi$  是非零测度, 证明:  $X$  限制在  $S_0 = \{x : \pi(x) > 0\}$  上是可逆马氏链.

**练习 4.5.2** 设  $X$  是可逆马氏链, 证明: 若  $p(x, y) > 0$ , 则  $p(y, x) > 0$ .

**练习 4.5.3** 证明: (1) 对称测度是不变测度. (2) 不可分马氏链的对称测度如果存在则必然在相差一个常数倍的意义下唯一. (3) 证明: 一维整数格点上的非对称简单随机游动是可逆的, 但不不变测度未必是对称测度.

设  $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$  是  $x$  回到  $x$  的路径, 那么

$$\begin{aligned} \pi(x)p(x_0, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n) &= p(x_1, x_0)\pi(x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{n-1}, x_n) \\ &= \cdots = \pi(x)p(x_n, x_{n-1}) \cdots p(x_2, x_1)p(x_1, x_0), \end{aligned}$$

推出

$$\prod_{i=1}^n p(x_{i-1}, x_i) = \prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}),$$

也就是说  $X$  沿回路转移的概率与方向无关, 这个性质称为 Kolmogorov 的回路测试. 反过来, 设  $X$  不可分且满足 Kolmogorov 回路测试, 那么  $X$  是可逆的.

**练习 4.5.4** 设  $X$  是不可分且满足 Kolmogorov 回路测试. 证明: 对任何  $x, y \in S$ , 若  $p(x, y) > 0$  则  $p(y, x) > 0$ . 如果没有不可分性, 这个命题还成立吗?

事实上, 任取  $x \in S$ , 取  $\pi(x) = 1$ , 因为  $X$  的不可分性, 对任意  $y \in S$ , 存在道路  $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ , 使得对任何  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $p(x_i, x_{i+1}) > 0$ . 由马氏性,

$$\mathbb{P}^x(X_i = x_i, 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^n p(x_{i-1}, x_i),$$

这个概率称为是  $X$  沿上述道路从  $x$  转移到  $y$  的概率. 定义

$$\pi(y) := \pi(x) \frac{p(x_0, x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n)}{p(x_n, x_{n-1}) \cdots p(x_1, x_0)}.$$

首先  $X$  沿回路转移的概率与方向无关这个性质保证上述定义与路径无关, 其次容易验证  $\pi$  就是  $X$  的对称测度, 所以  $X$  是可逆的. 这证明了下面定理.

**定理 4.5.1** 不可分马氏链  $X$  可逆当且仅当  $X$  满足 Kolmogorov 回路测试.

可逆马氏链的好处是它可以用更直观更容易操作的电路图表达, 且其中的概率性质和我们熟知的物理定律有深刻的关系, 这让概率问题变得更加有趣. 现在让我们看电路图. 设  $G = (S, E)$  是一个连通的局部有限图, 局部有限是指每个节点的邻居是有限多个,  $S$  是节点的集合,  $E \subset \{(x, y) : x, y \in S\}$  是边的集合<sup>1</sup>. 图  $G$  的一个子集可以自然地看成子图. 说点  $x, y \in S$  相邻, 如果  $(x, y) \in E$ . 假设图是无向的, 即  $(x, y) \in E$  当且仅当  $(y, x) \in E$ . 注意这样同一条边在  $E$  中两次出现. 再设  $r$  是定义在  $E$  上的一个正对称函数, 即对任何边  $(x, y) \in E$ ,  $r(x, y) = r(y, x) > 0$ . 称  $r(x, y)$  称为是边  $(x, y)$  上的电阻率或电阻,  $r$  称为是  $G$  上的电阻函数. 定义边上的电导率或电导为电阻的倒数  $c(x, y) := r(x, y)^{-1}$ ,  $(x, y) \in E$ . 自动地, 如果  $(x, y) \notin E$ ,  $x \neq y$ , 那么不妨认为  $r(x, y) = +\infty$ ,  $c(x, y) = 0$ . 因此  $c$  看成  $S \times S$  上的非负对称函数, 且  $E = \{(x, y) : c(x, y) > 0\}$  图  $G$  加上电阻 (或者电导) 函数  $r$ ,  $(S, r)$ , 称为电路图, 其中图的结构已经在电阻函数中表达. 注意这里的电路图和物理中的电路图的区别, 物理中的电路图必须有限的且在连接电源后才是真正的电路图, 因此与选择连接电源的节点有关.

给定一个电路图  $G = (S, r)$ . 定义

$$c(x) := \sum_{y \in S} c(x, y), \quad p(x, y) := \frac{c(x, y)}{c(x)}, \quad x, y \in S.$$

那么  $(p(x, y) : x, y \in S)$  是  $S$  上转移函数, 且  $c(x)p(x, y) = c(x, y) = c(y, x) = c(y)p(y, x)$ . 因此电路图诱导了一个  $S$  上的可逆马氏链. 直观地解释, 马氏链就如同在电路图上跑动的电荷, 它自然地更容易向电导性更好的邻居转移. 反过来, 设  $X$  是有限集合  $S$  上一个不可分可逆马氏链, 转移函数为  $p(x, y)$ , 对称测度是  $\pi(x)$ ,  $x \in S$ . 那么定义边的集合  $E := \{(x, y) : p(x, y) > 0\}$ , 电导率

$$c(x, y) := \pi(x)p(x, y), \quad x, y \in S.$$

那么由可逆性,  $c$  是  $E$  上对称正函数. 图  $G$  及其电阻函数或电导函数一起  $(G, r)$  或  $(G, c)$  称为一个电路网络. 最后, 我们说两个电路图  $(c(x, y) : (x, y) \in E)$  与  $(c'(x, y) : (x, y) \in E)$  相差一个常数是指存在  $k > 0$  使得对任何  $(x, y) \in E$  有  $c'(x, y) = kc(x, y)$ . 显然相差一个常数的两个电路图诱导同一个转移函数. 因此我们证明了下面的定理.

<sup>1</sup>在不引起混淆的情况下, 有时不刻意区分图  $G$  与其顶点集  $S$ .

**定理 4.5.2** 如上方式, 在相差一个常数不计的情况下, 电路图与可逆马氏链一一对应.

所有边上的电阻等于 1 的电路图称为简单电路图, 所对应的马氏链是图上简单随机游动.

**练习 4.5.5** (1) 求整数格点上的简单 (非对称情形) 随机游动对应的电路图. (2) 平面上整数格点上的随机游动向上下左右邻居转移的概率分别为  $p/2, p/2, q/2, q/2$ , 其中  $p + q = 1$ . 它是否可逆? 若可逆, 求它的对称测度和对应的电路图.

下面我们就设  $G = (S, r)$  是一个连通的电路图,  $X$  是对应的不可分可逆马氏链. 下面我们主要讨论两者的关系. 用符号  $x \sim y$  表示  $x, y$  相邻, 即  $(x, y) \in E$ , 或  $c(x, y) > 0$ , 或  $p(x, y) > 0$ . 设  $H \subset S$ , 说  $y$  与  $H$  相邻, 如果  $y$  与  $H$  中的某点相邻, 记为  $y \sim H$ . 定义

$$\bar{H} := H \cup \{y \in S : y \sim H\},$$

称为是  $H$  的邻包, 它是  $H$  及与  $H$  相邻的点的全体. 若  $H$  是  $S$  的非空真子集, 那么连通性推出  $\bar{H} \setminus H$  非空.

**定义 4.5.2** 说状态空间  $S$  上的函数  $f$  在点  $x \in S$  调和, 如果

$$f(x) = \sum_{y \in S} p(x, y)f(y).$$

说  $f$  在子集集合  $H$  上调和, 如果它在  $H$  的任何点调和.

上面的定义类似于球面平均性质, 也即  $f(x) = \mathbb{E}^x f(X_1)$ . 另外, 把

$$\Delta(x, y) = p(x, y) - 1_{\{x=y\}}$$

看成是  $S$  上的 Laplace 算子,  $f$  在点  $x$  调和等价于  $\Delta f(x) = 0$  或者  $pf(x) = f(x)$ . 这里任何二元函数  $k(x, y)$  都诱导  $S$  上函数空间的算子  $kf(x) := \sum_{y \in S} k(x, y)f(y)$ .

**定理 4.5.3** 1. (最大值原理) 设  $H$  是  $S$  的一个连通 (即作为子图) 子集,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  在  $H$  上调和. 如果  $f$  在  $H$  上达到最大值  $\max f := \max_{x \in S} f(x)$ , 那么  $f$  在  $\bar{H}$  上是常数.

2. (唯一性) 设  $H$  是  $S$  的有限真子集. 如果  $S$  上的函数  $f, g$  在  $H$  上调和且在  $H^c$  上相等, 那么  $f = g$ .

3. (Dirichlet 问题) 设  $H$  是  $S$  的有限真子集,  $f_0$  是  $H^c$  上的函数, 则满足在  $H$  上调和且在  $H^c$  上等于  $f_0$  的唯一解是  $f(x) = \mathbb{E}^x f_0(X_\tau)$ , 其中  $\tau$  是  $H^c$  的进入时.

证明. (1) 如果  $f$  在点  $x$  调和且  $f(x) = \max f$ , 那么由调和的定义

$$f(x) = \sum_{y \in S} p(x, y) f(y)$$

推出当  $y \sim x$  时,  $f(y) = \max f$ . 因为  $H$  是连通的, 故  $f$  在  $\bar{H}$  上都等于  $\max f$ .

(2) 令  $h := f - g$ , 则  $h$  在  $H$  上调和且在  $H^c$  上为零. 要证  $h$  恒等于零. 假设  $h$  在  $H$  的某点处非零, 例如正, 则因  $H$  有限,  $h$  在  $H$  的某点  $x_0$  处达到最大值, 令  $H_0$  表示  $H$  中与  $x_0$  连通的点的全体 ( $x_0$  在子图  $H$  中的连通分支), 由 (1) 推出  $h$  在  $\bar{H}_0$  上是正常数. 因  $H_0$  是子图  $H$  中的一个连通分支, 故与  $H_0$  相邻的点若不在  $H_0$  中则必定不在  $H$  中, 即  $\bar{H}_0 \setminus H_0 \subset H^c$ , 因左边非空故矛盾.

(3) 唯一性由 (2) 保证. 我们来验证  $f$  符合两个条件就可以了. 首先  $X_\tau \in H^c$ , 故定义有意义. 另外若  $x \notin H$ , 则  $\mathbb{P}^x(\tau = 0) = 1$ , 故  $f(x) = f_0(x)$ ; 若  $x \in H$ , 则  $\mathbb{P}^x(\tau \geq 1) = 1$ , 因此  $\tau \circ \theta_1 + 1 = \tau$ . 然后由马氏性推出

$$f(x) = \mathbb{E}^x(f_0(X_\tau) \circ \theta_1) = \mathbb{E}^x(\mathbb{E}^{X_1}(f_0(X_\tau))) = \mathbb{E}^x f(X_1),$$

即  $f$  在  $x$  处调和. 完成证明.  $\square$

现在取非空子集  $A, B \subset S$ , 满足  $A \cap B = \emptyset$  且  $(A \cup B)^c$  是非空, 有限且连通. 加一个电源连接  $A, B$  使得  $A$  上每个点的电压是 1,  $B$  上每个点的电压是 0. 这时在电路上自动形成电压和电流: 电压函数  $v$  是  $S$  上的一个函数, 使得  $v|_A = 1, v|_B = 0$ , 及电流函数  $i$  是边  $E$  上的函数, 它们和电阻函数一起满足 Ohm 定律与 Kirchhoff 定律.

注释 4.5.1 我们在这里回顾中学物理学过的三个电学定律.

1. Ohm 定律: 对任何相邻两点  $x, y$ ,  $v(x) - v(y) = i(x, y)r(x, y)$ .
2. Kirchhoff 节点定律: 对于不直接联在电池上的点  $x$ , 即  $x \notin A \cup B$ , 有

$$\sum_{y \sim x} i(x, y) = 0,$$

即流出的电流和等于流入的电流和.

3. Kirchhoff 回路定律: 对任何  $x \in S$ , 如果  $x = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n = x$  是一个回路, 那么

$$\sum_{i=1}^n i(x_{i-1}, x_i) r(x_{i-1}, x_i) = 0.$$

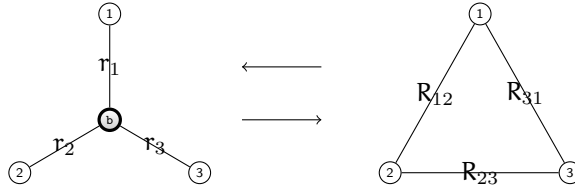
Ohm 定律蕴含着  $i$  是  $E$  上的反对称函数:  $i(x, y) = -i(y, x)$ . 另外 Ohm 定律等价于 Kirchhoff 回路定律. 事实上, Ohm 定律显然蕴含着 Kirchhoff 回路定律, 反过来, 如果 Kirchhoff 回路定律成立, 取  $b \in B$ , 对任何  $x \notin A \cup B$ , 存在  $x$  到  $b$  的路径  $b = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_n = x$ , 定义

$$v(x) := \sum_{i=1}^n i(x_i, x_{i-1}) r(x_i, x_{i-1}).$$

由 Kirchhoff 回路定律,  $v(x)$  与选择的路径无关, 因为  $v|_B = 0$ , 它也与  $b$  的选择无关. 容易推出  $v, i, r$  满足 Ohm 定律. 因此实际上我们只需要前面两个定律就够了.

在中学物理中学过怎么计算有效电导 (或电阻). 一般来说, 可以通过以下三种电路等价变换的公式来计算, 请读者自行用 Ohm 定律和 Kirchhoff 定律验证.

1. 串联电路: 两个串联的电阻  $r_1, r_2$  的电路的电阻等于一个  $r_1 + r_2$ ;
2. 并联电路: 两个并联的电阻  $r_1, r_2$  的电路的电阻等于  $\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ ;
3. 星形电路与三角电路: 设  $a_1, a_2, a_3$  与  $b$  是如图连接的星形, 电阻为  $r_i = r(b, a_i)$ , 那么它可以变换为  $a_1, a_2, a_3$  三角形连接, 电阻为  $R_{ij} = r(a_i, a_j)$ ,



其电阻关系如下

$$R_{12} = \frac{\gamma}{r_3}, \quad R_{23} = \frac{\gamma}{r_1}, \quad R_{31} = \frac{\gamma}{r_2},$$

其中

$$\gamma = (r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1}) r_1 r_2 r_3 = \frac{R_{12} R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$



强调一下, 在本节中, 对于集合  $A$ ,  $\tau_A$ ,  $\tau_A^+$  分别表示  $A$  的进入时, 首中时, 即

$$\tau_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \quad \tau_A^+ := \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

下面定理断言电压是个调和函数, 这是把电路和马氏链或者说把物理和数学联系起来的键.

**定理 4.5.4** 假设如上, 电压函数  $v$  有下面性质.

- (1) 电压函数  $v$  在  $(A \cup B)^c$  上调和.
- (2) 对任何  $x \in S$ ,  $v(x) = \mathbb{P}^x(\tau_A < \tau_B)$ .

证明. (1) 取  $x \notin A \cup B$ , 由节点定律,  $\sum_{y \sim x} i(x, y) = 0$ , 再由 Ohm 定律  $i(x, y) = (v(x) - v(y))c(x, y)$ , 故  $\sum_{y \sim x} (v(x) - v(y))c(x, y) = 0$ . 因此

$$v(x)c(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)v(y),$$

推出  $v$  在  $x$  处调和. (2) 应用定理 4.5.3,  $v(x) = \mathbb{E}^x v(X_\tau)$ , 其中  $\tau$  是  $A \cup B$  的进入时. 那么  $\tau = \tau_A \wedge \tau_B$ , 然后

$$\mathbb{E}^x v(X_\tau) = \mathbb{E}^x(v(X_{\tau_A}), \tau_A < \tau_B) + \mathbb{E}^x(v(X_{\tau_B}), \tau_A > \tau_B) = \mathbb{P}^x(\tau_A < \tau_B).$$

完成证明. □

**练习 4.5.6** 直接验证  $f(x) := \mathbb{P}^x(\tau_A < \tau_B)$  在  $(A \cup B)^c$  上调和且在  $A \cup B$  上等于  $v$ .

因为电流  $i$  反对称, 故

$$\sum_{x, y \in S: x \sim y} i(x, y) = \sum_{(x, y) \in E} i(x, y) = 0.$$

由 Kirchhoff 节点定律,

$$\sum_{x \in A} \sum_{y \sim x} i(x, y) = \sum_{x \in B} \sum_{y \sim x} i(y, x),$$

左边是由  $A$  流出的电流, 右边是流入  $B$  的电流, 他们是相等的, 记它为  $i(A, B)$ .

**定义 4.5.3** 在  $A, B$  两端加单位电压后的电流量  $i(A, B)$  定义为  $A, B$  之间的有效电导, 记为  $C_{\text{eff}}(A, B)$ , 其倒数定义为有效电阻, 记为  $R_{\text{eff}}(A, B)$ , 它等于从  $A$  流出单位电流时  $A, B$  两端的电压差.

现在设  $A = \{a\}$ ,  $a \notin B$ . 在记号中直接用  $a$  代替  $A$ . 下面的定理建立了有效电导与概率的关系.

**定理 4.5.5** 点  $a$  出发回到  $a$  前到达  $B$  的概率

$$\mathbb{P}^a(\tau_B < \tau_a^+) = \frac{C_{\text{eff}}(a, B)}{c(a)}.$$

证明. 加电池, 使得  $v(a) = 1, v|_B = 0$ . 首先由上面的定理,  $v(x) = \mathbb{P}^x(\tau_a < \tau_B)$ . 显然  $\tau_a^+ = \tau_a \circ \theta_1 + 1 \geq 1$ , 而从  $a$  出发时,  $\tau_B \geq 1$ . 因此

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^a(\tau_B < \tau_a^+) &= \mathbb{E}^a(1_{\{\tau_B < \tau_a\}} \circ \theta_1) = \sum_{x \sim a} \mathbb{P}^x(\tau_B < \tau_a) p(a, x) \\ &= \sum_{x \sim a} (1 - v(x)) p(a, x) = \frac{1}{c(a)} \sum_{x \sim a} (v(a) - v(x)) c(a, x) \\ &= \frac{1}{c(a)} \sum_{x \sim a} i(a, x) = \frac{C_{\text{eff}}(a, B)}{c(a)}. \end{aligned}$$

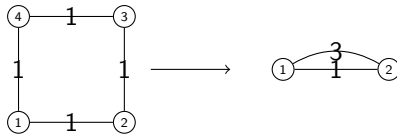
完成证明. □

**练习 4.5.7** (1) 设  $a \notin B$ . 记  $\xi$  从  $a$  出发在到达  $B$  前回到  $a$  的次数, 求  $\xi$  的分布.  
(2) 设  $x, y \notin B$ ,  $g(x, y)$  是从  $x$  出发在到达  $B$  前到  $y$  的平均次数. 证明:

$$c(x)g(x, y) = c(y)g(y, x).$$

下面的例子说明怎样用这个定理来计算概率. 注意图上标注的是边的电阻.

**例 4.5.1** 设  $a, b, c, d$  是正方形的四个顶点, 每边的电导都是 1. 那么相邻两点  $a, b$  间的有效电导为  $C_{\text{eff}}(a, b) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ .



因此 1 出发回到 1 前到达 2 的概率

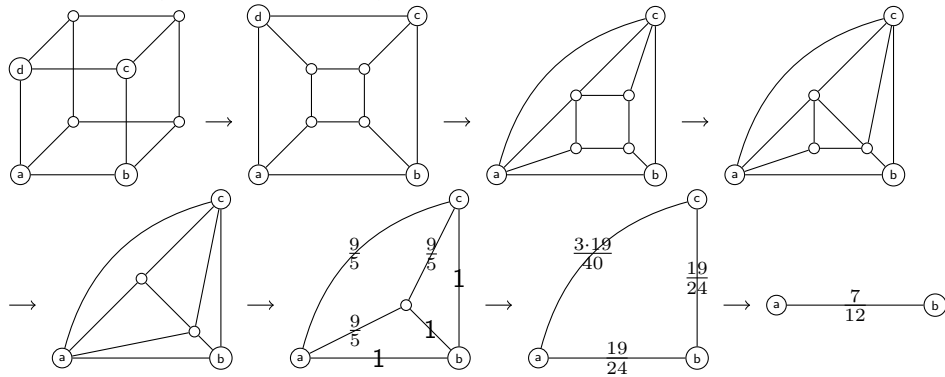
$$\mathbb{P}^1(\tau_2 < \tau_1^+) = \frac{C_{\text{eff}}(1, 2)}{c(1)} = \frac{2}{3}.$$

而相对的两点 1, 3 间的有效电导为  $C_{\text{eff}}(1, 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ , 而对应的概率为  $\frac{1}{2}$ . 这个例子比较简单, 上面的概率可直接计算. 利用定理 4.5.4, 设从  $x_i = \mathbb{P}^i(\tau_2 < \tau_1^+)$ , 则由调和性可以列出如下方程:  $x_2 = 1$ ,

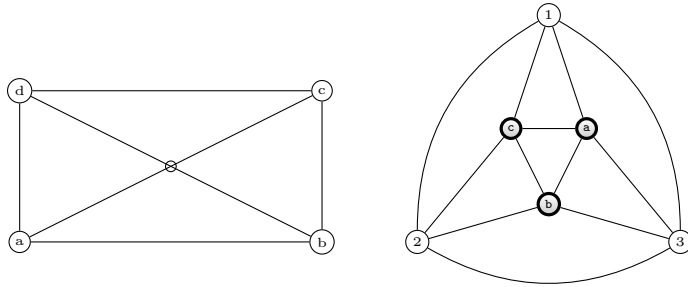
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4, \\ x_4 = \frac{1}{2}x_3, \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4. \end{cases}$$

解得  $x_1 = 2/3$ . ■

**例 4.5.2** 设有一个正方体网络, 每边的电导依然是 1. 求相邻两点 a, b 间的有效电阻. 通过一系列的从星形电路到三角电路的等价变换, 如图不断地简化电路. 方法不唯一. 算出 a, b 间有效电阻为  $7/12$ , 请读者补充细节.



**练习 4.5.8** 左下图, 5 个顶点的图, 每边的电阻是 1, 求 (1)  $\mathbb{P}^a(\tau_b < \tau_a^+)$ ; (2)  $\mathbb{P}^a(\tau_c < \tau_a^+)$ . (3) 设中间的顶点是 e, 求  $\mathbb{P}^a(\tau_e < \tau_a^+)$ .



**练习 4.5.9** 参考右上图, 每边电阻为 1, 求  $\mathbb{P}^2(\tau_3 < \tau_2^+)$ .

现在设  $S$  是可列集, 而图  $(S, E)$  是连通且局部有限的, 即每个顶点的邻居有限多,  $c$  是  $E$  上的对称正函数. 那么仍然如上对应有一个  $S$  上的可逆马氏链  $X$ . 取  $S_n$  是递增到  $S$  的有限子集列,  $B_n := S_n^c$ ,  $a \in S_1$ . 上面的定理仍然成立:

$$\mathbb{P}^a(\tau_{B_n} < \tau_a^+) = \frac{C_{\text{eff}}(a, B_n)}{c(a)}.$$

当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\tau_{B_n} \uparrow +\infty$ . 因此

$$\mathbb{P}^a(\tau_a^+ = \infty) = \frac{1}{c(a)} \lim_n C_{\text{eff}}(a, B_n).$$

称极限  $\lim_n C_{\text{eff}}(a, B_n)$  是  $a$  到  $\infty$  的电导, 记为  $C_{\text{eff}}(a, \infty)$ . 因为  $X$  常返当且仅当  $\mathbb{P}^a(\tau_a^+ < \infty) = 1$ , 故推出  $X$  常返当且仅当  $C_{\text{eff}}(a, \infty) = 0$ , 即  $a$  与无穷远的电导为零. 将此结果阐述为定理.

**定理 4.5.6** 设  $X$  是  $S$  上的不可分可逆马氏链. 则它常返当且仅当其中一点 (任意) 到无穷的有效电导为零, 等价地, 有效电阻为无穷.

**例 4.5.3** 设  $X$  是直线整数格点上的简单随机游动. 对应的网络是整数格点网络, 每边的电导是 1. 取  $S_n := \{-n, -n+1, \dots, n-1, n\}$ ,  $B_n := S_n^c$ . 那么

$$C_{\text{eff}}(0, B_n) = \frac{2}{n}.$$

因此  $C_{\text{eff}}(0, \infty) = 0$ . 故  $X$  常返. ■

**定义 4.5.4** 给定一个图  $G = (S, E)$ . 设  $A, B$  是  $S$  的非空子集且  $A \cap B = \emptyset$ .  $E$  上的一个反对称函数  $j$  称为是  $A$  到  $B$  的流, 如果对任何  $x \notin A \cup B$ ,

$$\sum_{y \sim x} j(x, y) = 0.$$

类似地验证

$$\sum_{x \in A} \sum_{y \sim x} j(x, y) = \sum_{x \in B} \sum_{y \sim x} j(y, x),$$

因此令  $j(A, B) := \sum_{x \in A} \sum_{y \sim x} j(x, y)$  称为是  $A$  到  $B$  的流量.

**定义 4.5.5** 说  $j$  是  $A$  到  $B$  的一个单位流, 是指  $j(A, B) = 1$ . 给定图  $G$  上的电阻  $r$ , 对任何  $A$  到  $B$  的流  $j$  定义  $j$  产生的能量

$$\mathcal{E}(j) = \mathcal{E}_{A, B}(j) := \frac{1}{2} \sum_{(x, y) \in E} j(x, y)^2 r(x, y).$$

下面我们证明 Thompson 定律.

**定理 4.5.7** (Thompson) 设  $i$  是在  $A$  上加电压  $v > 0$ ,  $B$  接地时产生的单位电流, 那么在所有  $A$  到  $B$  的单位流中,  $i$  产生的能量最小.

证明. 设  $j$  是  $A$  到  $B$  的单位流, 令  $i' := j - i$ . 因为  $i, j$  是流量相同的流, 故  $i'$  是  $A$  到  $B$  的一个零流量的流. 计算能量

$$\mathcal{E}(j) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in E} j(x,y)^2 r(x,y) = \mathcal{E}(i) + \mathcal{E}(i') + \sum_{(x,y) \in E} i(x,y) i'(x,y) r(x,y).$$

而最后一项是零, 因为  $i$  是电流, 由 Ohm 定律, 流的定义,  $v$  在  $A$  上是常数  $v$ , 在  $B$  上是零等事实得

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y) \in E} i(x,y) i'(x,y) r(x,y) &= \sum_{(x,y) \in E} (v(x) - v(y)) i'(x,y) \\ &= \sum_{(x,y) \in E} v(x) i'(x,y) - \sum_{(x,y) \in E} v(y) i'(x,y) \\ &= 2 \sum_{(x,y) \in E} v(x) i'(x,y) = 2 \sum_{x \in S} v(x) \sum_{y \sim x} i'(x,y) \\ &= 2 \sum_{x \in A \cup B} v(x) \sum_{y \sim x} i'(x,y) = 2v \cdot i'(A, B) = 0, \end{aligned}$$

因此  $\mathcal{E}(j) = \mathcal{E}(i) + \mathcal{E}(i') \geq \mathcal{E}(i)$ , 即电流产生的能量最小.  $\square$

由上面的证明过程可以看出: 如果  $i$  是单位电流, 即  $i(A, B) = 1$ , 那么  $A$  上的电压等于有效电阻, 因此

$$\mathcal{E}(i) = v = R_{\text{eff}}(A, B),$$

即下面结论成立.

**推论 4.5.1** 单位电流产生的能量等于  $A, B$  间的有效电阻.

由此容易地推出下面的 Rayleigh 单调原理, 非常有用. 设  $r, r'$  是  $S$  上两个电阻函数,  $r' \geq r$  是指对任何  $(x, y) \in E$ ,  $r'(x, y) \geq r(x, y)$ .

**定理 4.5.8** (Rayleigh) 有效电阻关于电阻函数是递增的.

证明. 用  $R_{\text{eff}}(A, B)$  与  $R'_{\text{eff}}(A, B)$  分别表示  $A, B$  间对应于电阻函数  $r$  与  $r'$  的有效电阻,  $i$  与  $i'$  表示对应的单位电流,  $\mathcal{E}$  与  $\mathcal{E}'$  对应的能量. 那么由 Thompson 定律,

$$R'_{\text{eff}}(A, B) = \mathcal{E}'(i') \geq \mathcal{E}(i') \geq \mathcal{E}(i) = R_{\text{eff}}(A, B),$$

其中第一个  $\geq$  号是因为  $r' \geq r$ , 第二个等号是因为对于电路图  $(S, r)$ ,  $i$  是电流而  $i'$  只是流.  $\square$

由单调定理, 下面的结论是显然的. 它相当于一个比较定理: 两个可比的可逆马氏链有相同的常返暂留性.

**推论 4.5.2** 如果电路图  $G = (S, E)$  上的两个电阻函数  $r, r'$  是可比的, 即存在正常数  $c$  使得  $c^{-1}r \leq r' \leq cr$ , 那么对应的马氏链或者都是常返或者都是暂留.

把在  $S$  上任何两点  $x, y$  的连线去掉的图称为是断路, 相反, 把在  $S$  上两点  $x, y$  间接一个电阻为零的线, 或者说把两个点重合为一个点所得的图称为短路. 断路不妨看成电阻  $r(x, y) \uparrow +\infty$  的结果, 因此电阻函数是增加的, 而短路不妨看成  $r(x, y) \downarrow 0$  的结果, 因此电阻函数减少. 这样由 Rayleigh 单调定理推出断路后, 有效电阻只会增加; 短路后, 有效电阻只会减少. 因为马氏链  $X$  暂留当且仅当有效电导  $C_{\text{eff}}(a, \infty) > 0$ , 等价于有效电阻  $R_{\text{eff}}(a, \infty) < \infty$ , 显然此有效电阻也关于电阻函数递增, 故有下面的比较定理.

**定理 4.5.9** 暂留的马氏链短路后仍然是暂留的, 常返的马氏链断路后仍然是常返的. 换句话说, 如果某个短路后的链常返, 那么原来的链也常返, 如果某个断路后的链暂留, 那么原来的链也暂留.

**例 4.5.4** Polya 定理:  $\mathbb{Z}^d$  上简单随机游动当  $d \leq 2$  常返. 由比较定理, 只需对  $d = 2, 3$  的情况证明. 如果  $d = 2$ , 只需证明某个短路后的链是常返就够了. 对任何  $n \geq 0$ , 把格点  $\{(x, y) : |x| \vee |y| = n\}$  短路看成一个点  $a_n$ , 因为每条边的电导是 1, 而  $a_n$  有  $4(2n+1)$  条边连接  $a_{n+1}$ , 故  $c(a_n, a_{n+1}) = 4(2n+1)$ , 从  $a_0$  到无穷远的有效电阻为

$$R_{\text{eff}}(a_0, \infty) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4(2n+1)} = +\infty,$$

因此短路后的链是常返的.

**练习 4.5.10** 在平面整数格点图上,  $X$  从零点出发, 在任何点以概率  $p_1, p_2, p_3, p_4$  分别向上下左右转移, 就所有情况讨论什么条件下  $X$  是常返或者暂留.

以上短路的方法对于证明 3-维简单对称随机游动是暂留的就不好用了, 下面介绍 T. Lyons 的一个漂亮证法. 如果  $S$  是无限网络, 那么物理意义上的电路是不存在了, 谈论电流是没有意义的. 但是流依然可以定义.

定义 4.5.6 边  $E$  上的反对称函数  $j$  称为是  $a$  到无穷远的一个正流, 如果存在常数  $c > 0$  使得对任何  $x \in S$ , 有

$$\sum_{y \sim x} j(x, y) = c1_{\{a\}}(x).$$

定义  $j$  产生的能量

$$\mathcal{E}(j) := \frac{1}{2} \sum_{(x, y) \in E} j(x, y)^2 r(x, y).$$

下面定理实际上是一个充要条件, 对我们来说, 充分性就够了, 必要性留给读者.

定理 4.5.10 (T. Lyons, 1983) 如果存在一个从任意点  $a$  到无穷远处的能量有限的正流, 那么电路图对应的马氏链暂留.

证明. 取  $S_n$  是递增到  $S$  的有限子集列,  $B_n := S_n^c$ ,  $a \in S_1$ . 用  $i_n$  表示在  $a$  和  $B_n$  间加电压产生的从  $a$  流入的单位电流, 那么  $R_{\text{eff}}(a, B_n) = \mathcal{E}(i_n)$ , 因此马氏链暂留当且仅当  $\sup_n \mathcal{E}(i_n) < \infty$ . 如果  $j$  是一个从任意点  $a$  到无穷远处的能量有限的单位流, 那么  $j$  是从  $a$  到  $B_n$  的单位流, 由 Thompson 定律,  $\mathcal{E}(i_n) \leq \mathcal{E}(j) < \infty$ .  $\square$

练习 4.5.11 证明: 上面定理结论的逆也成立.

例 4.5.5 Polya 定理:  $\mathbb{Z}^d$  上简单随机游动当  $d = 3$  暂留. 对任何边  $(x, y)$ ,  $v_{xy} = (x + y)/2$ ,  $S_{xy}$  表示以  $v_{xy}$  为中心, 垂直于  $(x, y)$  且边与坐标轴平行的单位正方形. 定义  $j(x, y)$  为  $S_{xy}$  在原点为中心的单位球面上径向投影的面积, 并赋予它和向量  $y - x$  与  $v_{xy}$  内积相同的符号, 即  $|y| - |x|$  的符号. 简单的几何观察说明当  $x \neq 0$  时,  $\sum_{y \sim x} j(x, y) = 0$ ; 而  $\sum_{y \sim 0} j(0, y)$  等于单位球面面积. 因此  $j$  是原点到无穷远的一个正流. 此外  $j$  产生的能量

$$\mathcal{E}(j) = \frac{1}{2} \sum_{(x, y)} j(x, y)^2 = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{n \leq |x| < n+1} \sum_{y \sim x} j(x, y)^2,$$

当  $|x| \geq n$ ,  $y \sim x$  时,  $|v_{xy}| \geq n - 1/2$ , 有  $j(x, y) \leq 1/(n - 1/2)^2$ . 另外, 存在一个常数  $B$  使得夹在半径为  $n$  与  $n + 1$  两球间的格点个数不超过  $Bn^2$ . 因此

$$\mathcal{E}(j) \leq 3 \sum_n (n - 1/2)^{-4} Bn^2 < \infty,$$

即  $j$  是能量有限的流, 故而对应的链是暂留的.  $\blacksquare$

练习 4.5.12 上面的例子需估计夹在两球间格点个数, 这不容易.

1. 令  $a_n = |\{x \in \mathbf{Z}^3 : n \leq |x| < n+1\}|$ . 证明:  $a_n/n^2$  有界; (\*) 问它是否收敛? 若是, 求极限.
2. 如果上述估计有困难, 可以换个思路. 令  $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ , 求  $\{x \in \mathbf{Z}^3 : \|x\| = n\}$ , 然后证明  $j$  的能量有限.

练习 4.5.13 1. 用  $T_k$  表示每个顶点都有  $k$  个后代的正则树, 在除去根外的每个顶点, 它往 parent 跳的概率是  $p$  往每个 child 跳的概率是  $q/k$ . 求  $p$  为何值时, 该马氏链是暂留的?

2. 证明: 平面上的六角形 (蜂窝) 格点网络和三角形网络上的简单随机游动是常返的.

练习 4.5.14 (\*) 图  $G$  上两点距离是指两点间最短路径的长度. 考虑具有顶点  $\{0, 1\}^n$  的超正方体上的简单电网, 证明:  $R_{\text{eff}}(a, b)$  是  $a, b$  间距离的递增函数.

练习 4.5.15 给定一个电路图  $(S, r)$ ,  $X$  是对应的马氏链,  $a \in S$ ,  $Z \subset S$ ,  $a \notin Z$ . 对任何  $x, y \in S$ ,  $x \sim y$ , 用  $S_{xy}$  表示  $X$  在碰到  $Z$  之前从  $x$  转移到  $y$  的次数, 即  $S_{xy} := \sum_{n \geq 0} 1_{\{X_n = x, Z_{n+1} = y, n < \tau\}}$ , 其中  $\tau$  是  $Z$  的首中时. 证明: 如果在  $a$  和  $Z$  间加电压形成一个  $a$  到  $Z$  的单位电流  $i$ , 那么  $\mathbb{E}^a(S_{xy} - S_{yx}) = i(x, y)$ .

练习 4.5.16 证明: 有效电导的极限  $\lim_n C_{\text{eff}}(a, S_n^c)$  与递增到  $S$  的子集列  $\{S_n\}$  的选取无关, 它是否大于零与  $a$  的选取无关.

练习 4.5.17 设  $\mathbf{Z}^2$  是平面上整数格点, 取  $H = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  以及  $S = \bar{H}$ , 每个边的电阻是 1. 令  $A = \{(x, y) \in S : |x| = 2\}$ ,  $B = \{(x, y) \in S : |y| = 2\}$ . 求  $\mathbb{P}^{(1,0)}(T_A < T_B)$ .



## 第五章 泊松过程与布朗运动

最后一章将介绍泊松过程和布朗运动,它们是最基本的连续时间随机过程模型. 两类随机过程均是平稳独立增量过程,泊松过程的增量服从参数与时长成比例的泊松分布,而布朗运动的增量是期望为零方差与时长成比例的正态分布. 两个随机过程有相似的地方,也有本质的差别,泊松过程的轨道是整数值的阶梯式函数,而布朗运动的轨道是非常粗糙的连续函数.

### 5.1 泊松过程的定义与性质

随机变量  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布是指

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \geq 0.$$

为了方便用  $p_\lambda(k)$  表示这个概率. 泊松分布表达某一个时间段内事件发生的数量,例如到某个服务点的人数,某个地方发生地震的次数等等. 泊松分布与正态分布的来历都不是自然的,它们来自自然界中本不存在的无限. 正态分布来自中心极限,泊松分布来自二项分布的极限. 设  $\lambda > 0$ ,  $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$  是取值 0, 1 的 Bernoulli 随机序列,  $\mathbb{P}(X_j^{(n)} = 1) = \frac{\lambda}{n}$ , 那么直观地说, 成功次数  $Y_n := \sum_{j=1}^n X_j^{(n)}$  依分布收敛于参数为  $\lambda$  的泊松分布. 前面讲的随机过程实际上是随机序列,也就是离散时间的随机过程. 在本章中,我们考虑连续时间随机过程.

**定义 5.1.1** 设  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  是一个随机过程.

- (1) 如果对任何  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , 有  $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$  独立, 则称  $X$  为独立增量过程.
- (2) 如果对任何  $t, s > 0$ ,  $X_{t+s} - X_s$  与  $X_t - X_0$  同分布, 则称  $X$  为平稳增量过程.

如果  $X$  既是独立增量又是平稳增量过程, 那么称为平稳独立增量过程.

我们要注意时间连续和时间离散所导致的不同. 首先, 随机游动是离散时间的平稳独立增量过程, 它是独立同分布随机序列的和序列. 但是连续时间的平稳独立增量过程, 它不是像随机游动那么容易构造. 其次连续时间的随机过程的样本轨道是区间上的函数, 比离散时间的随机序列的样本轨道有更多的性质可以讨论, 例如连续性, 光滑性等.

**定义 5.1.2** 设  $\lambda > 0$ . 随机过程  $N = (N_t : t \geq 0)$  被称为泊松过程, 如果它满足:

- (1)  $N_0 = 0$  a.s.;
- (2) 是平稳独立增量过程;
- (3) 对任何  $t > s \geq 0$ ,  $N_t - N_s$  服从  $\lambda(t - s)$  的泊松分布;
- (4) 轨道右连续.

最后一个是轨道右连续性, 连续时间随机过程是右连续 (或者连续) 是指其几乎所有样本轨道右连续 (或者连续). 我们将在下一节证明泊松过程的存在性, 这里先假设它存在. 从定义看出  $N_t - N_s$  是非负整数, 所以我们自然地认为  $N_t$  是个取非负整数值且关于  $t$  递增. 要注意, 这个结论并不能被证明. 因为上面的结论是对固定的  $t, s$  几乎肯定的, 它不能保证样本轨道  $t \mapsto N_t(\omega)$  是取非负整数值且关于  $t$  递增的函数. 但在轨道右连续的假设下, 我们的确有这个结论.

**引理 5.1.1** 存在概率 1 的事件  $\Omega_0$  使得对任何  $\omega \in \Omega_0$ ,  $N_t(\omega)$  是一个零点为零的取非负整数值的递增右连续且有左极限的函数.

**证明.** 由定义以及概率的性质得知, 存在一个零概率集, 在其外保证  $N_0 = 0$ , 轨道右连续, 且对所有非负有理数  $t > s$ ,  $N_t - N_s$  是非负整数. 现在,  $\Omega_0$  是此概率集的补集, 因此, 对  $\omega \in \Omega_0$ ,  $t \mapsto N_t(\omega)$  在非负有理数上是零点为零的取非负整数值的递增函数. 由右连续性推出引理结论.  $\square$

由上面的引理知, 泊松过程的几乎所有样本轨道在任何有限时间内只有有限个跳跃, 将跳跃依次记为  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ , 也称为更新时间. 在跳跃点  $S_n$  上, 跳跃度为  $N_{S_n} - N_{S_n-}$ , 是正整数. 下面我们证明跳跃度只能是 1.

**引理 5.1.2**  $\mathbb{P}(N_{S_n} - N_{S_n-} \geq 2) = 0$ .

只需验证  $\mathbb{P}(N_{S_n} - N_{S_{n-}} \geq 2, 0 < S_n \leq 1) = 0$ . 实际上, 对任何  $m \geq 1$ , 由独立增量性

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{S_n} - N_{S_{n-}} \geq 2, 0 < S_n \leq 1) &= \sum_{j=1}^m \mathbb{P}\left(N_{S_n} - N_{S_{n-}} \geq 2, S_n \in \left(\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \mathbb{P}\left(N_{\frac{j}{m}} - N_{\frac{j-1}{m}} \geq 2\right) \\ &= m\mathbb{P}\left(N_{\frac{1}{m}} \geq 2\right), \end{aligned}$$

当  $m \rightarrow +\infty$  时右边趋于零, 推出结论.

再令  $T_n$  是跳跃 (或更新) 间隔时间,  $T_n := S_n - S_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

**定理 5.1.1**  $\{T_n : n \geq 1\}$  是独立同分布的, 且都服从参数为  $\lambda$  的指数分布.

证明. 先计算  $(S_1, S_2, \dots, S_k)$  的联合分布, 显然它的值域是

$$G := \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbf{R}^k : 0 < y_1 < \dots < y_k\}.$$

考虑矩形  $(s_1, t_1] \times (s_2, t_2] \times \dots \times (s_k, t_k] \subset G$ , 则  $0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_k < t_k$ . 一个重要的观察是  $s_1 < S_1 \leq t_1 < s_2 < S_2 \leq t_2 < \dots < s_k < S_k \leq t_k$  当且仅当  $N_{s_1} = 0, N_{t_1} - N_{s_1} = 1, N_{s_2} - N_{t_1} = 0, \dots, N_{s_k} - N_{t_{k-1}} = 0, N_{t_k} - N_{s_k} \geq 1$ . 然后由独立增量性质推出

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((S_1, \dots, S_k) \in (s_1, t_1] \times \dots \times (s_k, t_k]) &= \mathbb{P}(N_{s_1} = 0) \mathbb{P}(N_{t_1} - N_{s_1} = 1) \dots \mathbb{P}(N_{s_k} - N_{t_{k-1}} = 0) \mathbb{P}(N_{t_k} - N_{s_k} \geq 1) \\ &= e^{-\lambda(s_1 + s_2 - t_1 + \dots + s_k - t_{k-1})} \cdot (t_1 - s_1) \dots (t_{k-1} - s_{k-1}) \\ &\quad \cdot \lambda^{k-1} e^{-\lambda(t_1 - s_1 + \dots + t_{k-1} - s_{k-1})} (1 - e^{-\lambda(t_k - s_k)}) \\ &= \lambda^{k-1} (t_1 - s_1) \dots (t_{k-1} - s_{k-1}) (e^{-\lambda s_k} - e^{-\lambda t_k}) \\ &= \int_{(y_1, \dots, y_k) \in (s_1, t_1] \times \dots \times (s_k, t_k]} \lambda^k e^{-\lambda y_k} dy_1 \dots dy_k, \end{aligned}$$

另外由  $G$  中的矩形生成的  $\sigma$ -代数恰是  $G$  上的 Borel 代数, 故随机向量  $(S_j : 1 \leq j \leq k)$  的分布密度函数是

$$p(y_1, \dots, y_k) = \lambda^k e^{-\lambda y_k} 1_{\{0 \leq y_1 < \dots < y_k\}}. \quad (5.1.1)$$

现在我们来计算  $(T_1, \dots, T_k)$  的联合分布, 对于  $t_1, \dots, t_k > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > t_1, \dots, T_k > t_k) \\ &= \mathbb{P}(S_1 > t_1, S_2 - S_1 > t_2, \dots, S_k - S_{k-1} > t_k) \\ &= \int_{y_1 > t_1, y_2 - y_1 > t_2, \dots, y_k - y_{k-1} > t_k} \lambda^k e^{-\lambda y_k} dy_1 \dots dy_k \\ &= e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2} \dots e^{-\lambda t_k}, \end{aligned}$$

这证明了首先每个  $T_n$  都服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 其次  $\{T_n\}$  是相互独立的.  $\square$

练习 5.1.1 请考虑是否可以避开  $(S_n)$  直接证明间隔时间  $T_1, T_2$  是独立同分布且指数分布的. 提示: 先想一想有没有自己的思路, 如果没有, 那么仿照引理 5.1.2 的证明中细分时间的方法计算  $\{T_1 > t_1, T_2 > t_2\}$  的概率.

练习 5.1.2 设  $\xi_n : n \geq 1$  是 01 值的 Bernoulli 随机序列,  $S_0 = 0, S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$ . 对任何  $t > 0$ , 定义  $X_t := \inf\{n \geq 0 : S_n > t\}$ . 求  $X_t$  的分布与期望.

练习 5.1.3 设  $N = (N_t)$  是参数为  $\lambda$  的泊松过程,  $(X_n : n \geq 1)$  是独立同分布且与  $N$  独立的随机序列, 分布函数为  $F$ . 令

$$Y_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n.$$

证明  $(Y_t)$  也是平稳独立增量过程并求  $Y_t$  的分布.

练习 5.1.4 阶梯函数是指存在递增趋于无穷的正数列  $(a_n)$  使得函数在任何区间  $[a_{n-1}, a_n)$  上是常数, 其中  $a_0 = 0$ . 设  $Y = (Y_t)$  是一个几乎所有样本轨道是从零出发的阶梯函数的平稳独立增量过程.

1. 令  $T_1 = \inf\{t > 0 : Y_t \neq 0\}$ , 证明:  $T_1$  是指数分布的.

2. 令  $X_1 = Y(T_1)$ , 证明:  $X_1$  与  $T_1$  独立.

(\*) 由此猜测该过程是怎样演变的.

练习 5.1.5  $S_n - S_{n-1}$  是  $n$  个更新间隔时间, 而  $S_{N_t+1} - S_{N_t}$  称为跨越  $t$  时刻的更新间隔时间, 因为  $S_{N_t+1} > t \geq S_{N_t}$

1. 证明:  $S_{N_t+1} - t$  与  $t - S_{N_t}$  独立.

2. 求以上两个随机变量的分布.
3. 求  $S_{N_t+1} - S_{N_t} = T_{N_t+1}$  的分布与期望.
4. 设  $\mathcal{G}_n = \sigma(T_j : j \leq n)$ , 证明:  $N_t + 1$  是  $(\mathcal{G}_n)$  停时, 而  $N_t$  不是.

下面我们来构造泊松过程. 从前一节我们看到, 泊松过程的跳跃间隔时间是独立同分布的且是指数分布的, 因此我们从这个性质来反向构造泊松过程. 设有概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  和独立同分布随机序列  $\{T_n : n \geq 1\}$ , 它们的分布是参数为  $\lambda$  的指数分布. 定义  $S_0 := 0, S_n := \sum_{j=1}^n T_j$ , 再定义

$$N_t := \inf\{k \geq 0 : S_{k+1} > t\} = \sup\{k \geq 0 : S_k \leq t\},$$

即  $N_t = k$  当且仅当  $S_k \leq t < S_{k+1}$ , 显然是右连续的. 这里的  $N$  称为  $(S_n)$  诱导的计数过程.

**定理 5.1.2** 该过程  $N = (N_t)$  是参数为  $\lambda$  的 Poisson 过程.

这个定理看起来很显然, 我们已经看到泊松过程的跳跃间隔时间是独立同分布的指数分布序列, 反之, 这样一个序列  $S = (S_n)$  显然唯一地定义了一个随机过程  $N = (N_t)$ , 因此这个过程只可能是泊松过程. 实际上不是这么简单, 如果我们知道泊松过程存在, 那么可以以此证明上面构造的过程与泊松过程同分布, 但现在泊松过程的存在是个问题, 所以前面的计算本质上是不可靠的. 因此要证明上面的定理, 需要计算  $N$  的有限维分布.

首先, 从  $(T_n)$  出发容易验证  $(S_1, \dots, S_n)$  的联合密度是由 (5.1.1) 给出, 由此获得下面密度.

**引理 5.1.3** 设  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$ , 则  $(S_{k_1}, \dots, S_{k_n})$  的联合密度是

$$\prod_{j=1}^n \frac{(y_j - y_{j-1})^{k_j - k_{j-1} - 1}}{(k_j - k_{j-1} - 1)!} \lambda^{k_n} e^{-\lambda y_n} 1_{\{0 \leq y_1 < \dots < y_n\}},$$

其中  $y_0 = 0, k_0 = 0$ .

然后对  $0 < t_1 < \dots < t_n, 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ , 因为  $N_{t_j} = k_j$  等价于  $S_{k_j} \leq t_j < S_{k_j+1}$ , 所以可以推出下面的引理.

**引理 5.1.4** 如上

$$\mathbb{P}(N_{t_j} = k_j, 1 \leq j \leq n) = p_{\lambda t_1}(k_1) p_{\lambda(t_2 - t_1)}(k_2 - k_1) \cdots p_{\lambda(t_n - t_{n-1})}(k_n - k_{n-1}).$$

这是泊松过程的有限维分布.

当  $n = 1$  时, 利用前一个引理得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(S_k \leq t < S_{k+1}) \\ &= \iint_{y_1 \leq t < y_2} \frac{y_1^{k-1}}{(k-1)!} \lambda^{k+1} e^{-\lambda y_2} dy_1 dy_2 = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

**练习 5.1.6** 完成引理中  $n = 2$  的证明. (\*) 完整的证明留给读者. 提示: 这里提供另外一个思路. 定义过程  $N'_t := N_{t+t_1} - N_{t_1}$ ,  $t \geq 0$ , 与  $t_1$  开始的更新时间  $S'_n := S_{N_{t_1+n}} - t_1$ ,  $n \geq 1$ . 完成以下工作 (1)  $N'$  是  $(S'_n)$  诱导的计数过程. (2) 计算  $N_{t_1}$  与  $(S'_j : 1 \leq j \leq n)$  的联合分布. 最终推出  $(S'_n)$  与  $N_{t_1}$  独立且与  $(S_n)$  同分布.

在上面的构造中, 如果我们只要求  $(T_n)$  是独立同分布的非负随机序列, 那么随机过程也一样可以定义.

**定义 5.1.3** 当  $(T_n)$  是独立同分布的非负随机序列时,  $(S_n)$  是其部分和序列, 它所诱导的计数过程  $N = (N_t)$  称为 (间隔时间分布为  $F$  的) 更新过程.

显然更新过程的分布由  $T_n$  的分布函数  $F$  唯一决定. 当且仅当  $F$  是指数分布时,  $N$  是泊松过程. 不仅如此, 只要  $N$  是独立增量过程或者设置是马氏过程,  $F$  必是指数分布.

**练习 5.1.7** 设  $\{\xi_n : n \geq 1\}$  独立同分布且服从  $[0, 1]$  上均匀分布,  $S$  与之独立且服从参数为  $\lambda$  的泊松分布. 定义

$$N(s, t] := \sum_{n=1}^S 1_{\{s < \xi_n \leq t\}}, \quad 0 \leq s < t \leq 1.$$

再令  $N_t = N(0, t]$ . 证明:  $N = (N_t)$  是时间  $0 \leq t \leq 1$  上的泊松过程, 然后请思考怎么才能得到完整的泊松过程. 提示: 先证明  $N$  满足泊松过程定义中的 2,3 当且仅当对任何实数  $x_1, \dots, x_n$  有

$$\mathbb{E} \left( \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n x_j N(t_{j-1}, t_j] \right\} \right) = \exp \left( -\lambda \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})(1 - e^{-x_j}) \right).$$

## 5.2 布朗运动的定义与构造

如果数学概念有血统的话, 那么布朗运动绝对有辉煌的血统. 1827 年, 英国生物学家 R. Brown 观察到一种他难以解释的现象: 花粉在完全静止的液体表面仍然

会呈现无休止不规则的运动. 这引起了许多科学家的兴趣, 提出了各种不同的解释. 1905 年, 物理学家爱因斯坦用统计物理学的方法推导出了热传导现象的数学描述, 他认为热传导是由于物质内部的原子或分子之间不规则的碰撞而导致的, 还具体地给出了热传导的转移密度函数. 布朗运动也可以由原子或分子对于花粉的不规则的碰撞来进行解释, 数学家因此把花粉运动抽象为一个具有热传导转移函数的连续轨道的随机过程. 1921 年, 数学家, 控制论创始人 N.Wiener 证明了具有这样的随机过程的存在性. 自此之后, 布朗运动一直是概率论中最重要的一个随机过程.

布朗运动也是平稳独立增量过程, 但它的增量服从正态分布.

**定义 5.2.1** 随机过程  $B = (B_t : t \geq 0)$  被称为标准 Brown 运动, 如果它满足

- (1)  $B_0 = 0$  a.s.;
- (2) 是平稳独立增量过程;
- (3) 对任何  $t > s \geq 0$ ,  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ ;
- (4) 轨道连续.

定义中有四个条件, (1) 表示从零出发, 不是本质的. 如果没有它, 就称为布朗运动, 这时  $B_0$  未必是正态分布, 但  $(B_t - B_0)$  是与  $B_0$  独立的标准布朗运动. 在本教材中, 一般都是指标准的. (1)(2)(3) 决定了该随机过程的有限维分布, 也决定了分布; 条件 (3) 更一般地应该是  $B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$ , 其中  $\sigma$  理解为介质系数, 或者扩散系数.

我们先来构造满足前 3 条的随机过程 (称为预布朗运动), 最后用 Wiener 的思想证明这个过程有连续修正. 预布朗运动通常有两种办法构造, 一是假设预布朗运动的存在来找到相容的有限维分布族, 然后应用 Kolmogorov 的相容性定理; 二是下面我们采用的更有趣的方法: 通过 Gauss 过程构造预布朗运动. 一个随机过程  $X = (X_t : t \geq 0)$  称为 Gauss 过程, 如果它的任何有限维分布是 Gauss 分布 (即正态分布). 该 Gauss 过程称为中心化的, 如果对任何  $t$ ,  $\mathbb{E}X_t = 0$ .

设  $X$  是一个中心化的 Gauss 过程. 令  $c(t, s) := \mathbb{E}(X_t X_s)$ ,  $s, t \geq 0$ , 称为过程的协方差函数. 因为协方差矩阵唯一决定 Gauss 分布, 所以协方差函数唯一决定中心化 Gauss 过程的分布.

**定理 5.2.1**  $B = (B_t)$  是预布朗运动当且仅当它是一个中心化 Gauss 过程且协方差函数为  $\mathbb{E}(B_t B_s) = s \wedge t$ .

证明. 设  $(B_t)$  是预布朗运动. 首先,  $\mathbb{E}B_t = \mathbb{E}(B_t - B_0) = 0$ . 其次, 因为对任何  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ,  $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ ,  $j = 1, \cdots, n$  独立且是 Gauss 分布的, 所以  $(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$  也是 Gauss 分布的. 因此  $B$  是 Gauss 过程. 最后, 当  $t > s$  时,  $\mathbb{E}(B_t B_s) = \mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s] + \mathbb{E}(B_s^2) = s$ .

反之设  $(B_t)$  是定理中所说的 Gauss 过程. 则增量的分布也是 Gauss 的且增量的协方差当  $j < k$  时为

$$\mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) = t_j - t_{j-1} - t_j + t_{j-1} = 0.$$

因此增量必定是独立的, 说明  $(B_t)$  是预布朗运动.  $\square$

有一个很巧妙的方法可以构造 Gauss 过程. 取  $H = L^2[0, \infty)$ ,  $[0, \infty)$  上的平方可积函数全体, 内积为

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(t)g(t)dt.$$

再取一个概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  及其上的独立随机序列  $(Z_n : n \geq 1)$ , 都服从标准正态分布, 这样的随机序列存在性是由概率论课程所保证的. 现在  $H$  是一个 Hilbert 空间, 取一个标准正交基  $(e_n : n \geq 1)$ . 任何一个函数  $f \in H$  都有表示  $f = \sum_{n \geq 1} \langle f, e_n \rangle e_n$ . 定义

$$X(f) := \sum_{n \geq 1} \langle f, e_n \rangle Z_n,$$

右边在  $L^2$ -意义下收敛. 因为右边是独立 Gauss 序列的和, 所以必然也是 Gauss 分布的, 且

$$\mathbb{E}[X(f)X(g)] = \sum_{n \geq 1} \langle f, e_n \rangle \langle g, e_n \rangle = \langle f, g \rangle, \quad f, g \in H.$$

**练习 5.2.1** 对任何  $f_j \in H$ ,  $1 \leq j \leq n$ , 随机向量  $(X(f_j) : 1 \leq j \leq n)$  是 Gauss 分布的.

对任何  $t \geq 0$ , 定义  $X_t := X(1_{[0,t]})$ . 显然  $(X_t)$  是中心化的 Gauss 过程且

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle = t \wedge s.$$

**定理 5.2.2** 过程  $(X_t)$  是一个预布朗运动.

过程  $(X_t)$  还不是布朗运动, 我们将证明它有个修正是布朗运动.

**定义 5.2.2** 过程  $(Y_t)$  称为是过程  $(X_t)$  的修正, 如果当任何  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ .



修正不改变分布.

练习 5.2.2 证明 (1) 如果  $Y = (Y_t)$  是  $X = (X_t)$  的修正, 则它们同分布. (2) 如果  $X$  是预布朗运动, 则其修正也是预布朗运动.

定理 5.2.3 (N. Wiener) 标准 Brown 运动存在.

证明. 假设概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  及其上的预布朗运动  $X = (X_t)$ . 我们要修正  $X$  使得它连续. 下面的矩等式是显然并关键的

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^{2k} = (2k-1)!!|t-s|^k. \quad (5.2.1)$$

定义

$$H = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=l}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{N2^n} \left( \left| X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \right| \geq \frac{1}{2^{n/8}} \right) = \bigcup_{N=1}^{\infty} \overline{\lim}_n A_n^N,$$

其中

$$A_n^N = \bigcup_{j=1}^{N2^n} \left( \left| X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \right| \geq \frac{1}{2^{n/8}} \right),$$

我们将证明  $\mathbb{P}(H) = 0$ .

应用 Chebyshev 不等式及矩等式 (5.2.1) ( $k=2$ ),

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \left| X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{j-1}{2^n}} \right| \geq \frac{1}{2^{n/8}} \right) &= \mathbb{P} \left( \left| X_{\frac{1}{2^n}} \right| \geq \frac{1}{2^{n/8}} \right) \\ &\leq \left( 2^{n/8} \right)^4 \mathbb{E} \left| X_{\frac{1}{2^n}} \right|^4 = \left( 2^{n/8} \right)^4 3 \left( \frac{1}{2^n} \right)^2 = 3 \cdot 2^{-3n/2}, \end{aligned}$$

那么

$$\mathbb{P}(A_n^N) \leq 3N2^n 2^{-3n/2} = 3N2^{-n/2},$$

由 Borel-Cantelli 引理推出对任何  $N$  有  $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n A_n^N) = 0$ . 由此推出

$$\mathbb{P}(H) \leq \sum_N \mathbb{P}(\overline{\lim}_n A_n^N) = 0,$$

即  $\mathbb{P}(H^c) = 1$ . 另一方面, 由 De Morgan 律

$$H^c = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n=l}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{N2^n} \left\{ \omega : \left| X_{\frac{j}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{j-1}{2^n}}(\omega) \right| < \frac{1}{2^{n/8}} \right\}$$

因此, 若  $\omega \in H^c$ , 则对任何  $N$ , 存在  $l$  使得对任何  $n > l$  与  $j = 1, \dots, N2^n$  有

$$\left| X_{\frac{j}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{j-1}{2^n}}(\omega) \right| < \frac{1}{2^{n/8}}.$$

对  $n \geq 1$ , 令  $D_n = \{\frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z}^+\}$ , 第  $n$  层二分点,  $D$  是所有  $D_n$  的并. 显然  $D$  是  $\mathbb{R}^+$  的可数稠子集. 我们因此可以作为一个分析习题证明对任何  $\omega \in H^c$ ,  $X_t(\omega)|_D$  作为  $D$  上的函数在任何有界区间上一致连续. 由此推出它有唯一的连续延拓, 用  $(B_t(\omega), t \geq 0)$  表示. 也就是说, 对任何  $t \geq 0$ ,

$$B_t(\omega) = \lim_{s \in D \rightarrow t} X_s(\omega), \quad \omega \in H^c.$$

若  $\omega \in H$ , 定义  $B_t(\omega) = 0$ . 由定义,  $(B_t)_{t \geq 0}$  是连续轨道的随机过程, 且对任何  $t \geq 0$ , 当  $D$  中的  $s$  趋于  $t$  时, 得  $X_s \xrightarrow{a.s.} B_t$ , 再由矩等式推出它  $L^2$  收敛于  $X_t$ . 因此  $(B_t)_{t \geq 0}$  是  $X$  的修正, 推出它是标准 Brown 运动.  $\square$

我们需要一个分析结果以证明  $(X_t(\omega) : t \in D \cap [0, n])$  对任何  $n$  一致连续.

**练习 5.2.3** 设  $\alpha > 0$  且  $f$  是  $D$  上的函数满足对任何  $N$ , 存在  $l$  使得对任何  $n > l$  与  $j = 1, \dots, N2^n$  有

$$\left| f\left(\frac{j}{2^n}\right) - f\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right| \leq \left(\frac{1}{2^n}\right)^\alpha.$$

那么对任何  $n > 0$ , 存在常数  $C_n$  使得对任何  $s, t \in D \cap [0, n]$ ,

$$|f(s) - f(t)| \leq C_n |s - t|^\alpha,$$

即  $f$  是  $\alpha$ -阶 (局部) Hölder 连续的.

**练习 5.2.4** 上面的证明说明布朗运动的几乎所有轨道是  $1/8$ -阶 Hölder 连续的. 适当地修改证明, 证明对任何  $\alpha < 1/2$ , 布朗运动的几乎所有轨道是  $\alpha$ -阶 Hölder 连续的.

### 5.3 简单性质

布朗运动的轨道有自相似性, 即把它时间和空间按适当比例缩小放大仍然是布朗运动. 设  $B = (B_t)$  是标准布朗运动.

**定理 5.3.1** 对任何  $c \neq 0$ , 则  $(c^{-1}B_{c^2t} : t \geq 0)$  也是标准布朗运动.

事实上, 设  $X_t := c^{-1}B_{c^2t}$ . 则  $(X_t)$  仍然是连续的中心化 Gauss 过程且

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \mathbb{E}(c^{-1}B_{c^2t} c^{-1}B_{c^2s}) = c^{-2}(c^2t) \wedge (c^2s) = t \wedge s.$$

因此  $X$  也是标准布朗运动.

**定理 5.3.2**  $(tB_{1/t} : t \geq 0)$  是标准布朗运动.

令  $X_t := tB_{1/t}$ ,  $t = 0$  时过程需补充定义为零. 类似地, 它是除零点连续的中心化 Gauss 过程且

$$\mathbb{E}X_t X_s = \mathbb{E}(tB_{1/t} \cdot sB_{1/s}) = ts(1/t \wedge 1/s) = t \wedge s.$$

最后需要证明  $X$  在零点连续. 因为  $X$  显然是预布朗运动, 所以它有一个连续修正是标准布朗运动, 而该修正的轨道当  $t > 0$  时就是  $X$  的轨道, 因此  $X$  和其修正是一致的.

简单对称随机游动  $X = (X_n)$  有反射原理, 设  $a, b$  是正整数, 则  $X_n = a - b$  且  $n$  之前访问过  $a$  的概率等于  $X_n = a + b$  的概率. 用  $\tau$  表示  $X$  首次访问  $a$  的时间, 则反射原理是

$$\mathbb{P}(\tau < n, X_n = a - b) = \mathbb{P}(X_n = a + b).$$

证明的思想是这样的, 将碰到  $a$  且  $X_n = a - b$  在  $\tau$  处将之后的轨道关于高度  $a$  反射, 得到的轨道必然是  $X_n = a + b$ , 这样的反射是一一对应的, 因此结论成立. 反射原理也可以写成  $\mathbb{P}(\tau < n, X_n < a) = \mathbb{P}(X_n > a)$ . 布朗运动的反射原理是类似的. 严格的证明要用到强马氏性, 省略.

**定理 5.3.3** 设  $a > 0$ ,  $\tau$  是布朗运动首次中  $a$  的时间, 则对于  $t > 0$ ,

$$\mathbb{P}(\tau < t, B_t < a) = \mathbb{P}(B_t > a).$$

反射原理的作用是计算  $\tau$  的分布. 注意到  $\{B_t > a\} \subset \{\tau < t\}$ , 故有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau < t) &= \mathbb{P}(\tau < t, B_t < a) + \mathbb{P}(\tau < t, B_t > a) \\ &= 2\mathbb{P}(B_t > a) = 2\mathbb{P}(B_1 > a/\sqrt{t}) \\ &= \int_{a/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

特别地, 当  $t$  趋于无穷时,  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 2\mathbb{P}(B_1 > 0) = 1$ , 即布朗运动在有限时间内必然访问  $a$ , 由对称性, 它在有限时间内必然访问任何状态, 这个性质称为点常返. 另外,  $\tau$  的密度函数是

$$p(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

练习 5.3.1 验证  $\tau$  是随机变量. 求  $\mathbb{E}(e^{-s\tau})$ .

## 5.4 轨道性质

在这一节中, 我们将讨论 Brown 运动的样本轨道, 证明几乎所有样本轨道在任何区间上都不是有界变差且在任何点都不可导. 设  $(B_t)_{t \geq 0}$  是一维标准 Brown 运动,  $D = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$  是区间  $[0, t]$  的有限划分,  $m(D) := \max_j |t_j - t_{j-1}|$ , 且设

$$V_D = \sum_{j=1}^n |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2$$

称为  $B$  在分划  $D$  上的二次变差, 它是非负随机变量.

定理 5.4.1  $V_D$  的期望  $\mathbb{E}V_D = t$  与方差

$$\mathbb{E}\left\{(V_D - \mathbb{E}V_D)^2\right\} = 2 \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2.$$

因此, 对任何  $t > 0$ ,

$$\lim_{m(D) \rightarrow 0} \sum_j |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 = t \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathbb{P}).$$

证明. 根据 (5.2.1),

$$\mathbb{E}V_D = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 = \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) = t.$$

为证明第二个公式, 我们如下计算

$$\mathbb{E}\left\{(V_D - \mathbb{E}V_D)^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{j=1}^n |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 - t\right)^2\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left\{ \left( \sum_{j=1}^n (|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 - (t_j - t_{j-1})) \right)^2 \right\} \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ (|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 - (t_j - t_{j-1}))^2 \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[ |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^4 - 2(t_j - t_{j-1})|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 + (t_j - t_{j-1})^2 \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[ 3(t_j - t_{j-1})^2 - 2(t_j - t_{j-1})^2 + (t_j - t_{j-1})^2 \right] = 2 \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2,
\end{aligned}$$

上面第三个等号是因为独立增量. 因此

$$\mathbb{E} \left( \sum_j |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 - t \right)^2 = 2 \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2 \leq 2t\mathbf{m}(D),$$

推出定理最后的结论.  $\square$

上面的收敛是依概率收敛. 但若定理中的分划取得更好的话, 上面的收敛可以变成是几乎处处的.

**定理 5.4.2** (1) 对任何  $t > 0$ , 当  $n$  趋于无穷时, 以概率 1 有

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left( B_{\frac{j}{2^n}t} - B_{\frac{j-1}{2^n}t} \right)^2 \longrightarrow t. \quad (5.4.1)$$

(2) Brown 运动的几乎所有样本轨道在区间  $[0, t]$  上变差无限.

证明. (1) 设  $D_n$  是  $[0, t]$  上的二分点分划

$$D_n = \{0 = \frac{0}{2^n}t < \frac{1}{2^n}t < \cdots < \frac{2^n}{2^n}t = t\}.$$

且用  $V_n$  表示  $V_{D_n}$ . 那么, 按引理 Lemma 5.4.1,  $\mathbb{E}V_n = t$  and

$$\mathbb{E}|V_n - \mathbb{E}V_n|^2 = 2 \sum_{l=1}^{2^n} \left( \frac{l}{2^n}t - \frac{l-1}{2^n}t \right)^2 = 2^{n+1} \left( \frac{1}{2^n}t \right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}}t^2.$$

因此由 Markov 不等式,

$$\mathbb{P} \left\{ |V_n - \mathbb{E}V_n| \geq \frac{1}{n} \right\} \leq n^2 \mathbb{E}|V_n - \mathbb{E}V_n|^2 = \frac{n^2}{2^{n-1}}t^2$$

故而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ |V_n - \mathbb{E}V_n| \geq \frac{1}{n} \right\} = t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} < +\infty.$$

这样由 Borel-Cantelli 引理得  $V_n \rightarrow t$  几乎处处收敛.

(2) 对任何  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{j=1}^{2^n} \left| B_{\frac{j}{2^n}t} - B_{\frac{j-1}{2^n}t} \right|^2 \leq \sup_j \left| B_{\frac{j}{2^n}t} - B_{\frac{j-1}{2^n}t} \right| \cdot V'_t,$$

其中左边的极限是 1, 因为布朗运动在闭区间上的一致连续, 右边第一项趋于零, 第二项  $V'_t$  是布朗运动的轨道在  $[0, t]$  上的全变差. 因此 (1) 的结论以及上面的不等式迫使  $V'_t = \infty$ .  $\square$

练习 5.4.1 证明: 布朗运动的几乎所有样本轨道在任何区间上变差无限.

练习 5.4.2 证明: 当  $\alpha > 1/2$  时, 布朗运动不是  $\alpha$ -阶 Hölder 连续的. 那么布朗运动是不是  $1/2$ -阶 Hölder 连续呢?

练习 5.4.3 设  $D = (t_i)$  是区间  $[0, t]$  上的划分. 求  $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))^2$  与  $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n B_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}))^2$  当  $D$  趋于零时的极限.

下面的定理是布朗运动的另外一种轨道性质.

定理 5.4.3 Brown 运动的几乎所有样本轨道是无处可导的.

证明. 只需证明 Brown 运动在  $[0, 1]$  区间上无处可导就足够了. 一个  $[0, 1]$  上的连续函数  $y = f(t)$  在某点  $t_0$  可导是指极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

存在, 如果是这样的话, 那么一定存在  $c > 0$  与  $\delta > 0$ , 使得当  $|h| < \delta$  时有

$$|f(t_0 + h) - f(t_0)| \leq c|h|.$$

因此, 当  $n$  充分大时, 区间  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  中可以有至少四个 (为什么四个?) 形如  $j/n$  的点, 也就是说, 存在  $1 \leq j \leq n-3$  使得

$$\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{j+2}{n}, \frac{j+3}{n} \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \text{ 且 } \frac{j+1}{n} \leq t_0 < \frac{j+2}{n}.$$

这样, 四个点到  $t_0$  的距离都不超过  $2/n$ . 因此, 对  $i = j, j+1, j+2$  有

$$\left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f(t_0) \right| + \left| f(t_0) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{4c}{n}.$$

用  $D$  表示函数  $t \mapsto B_t(\omega)$  在某个  $t \in [0, 1]$  处可导的  $\omega \in \Omega$  的全体, 那么

$$D \subset \bigcup_{c=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq l} \bigcap_{j=1}^{n-3j+2} \left\{ \left| B\left(\frac{i+1}{n}\right) - B\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{c}{n} \right\}.$$

令

$$D_n = \bigcup_{j=1}^{n-3j+2} \left\{ \left| B\left(\frac{i+1}{n}\right) - B\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{c}{n} \right\},$$

由 Brown 运动的性质得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_n) &\leq n \left( \mathbb{P} \left\{ \left| B\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{c}{n} \right\} \right)^3 = n \left( \mathbb{P} \left\{ |B(1)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \right\} \right)^3 \\ &= n \left( \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{2c}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^3 < n \left( \frac{2c}{\sqrt{n}} \right)^3 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这里可以看到在区间  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  内找四个点的原因是为了让这个极限是零. 最后, 由 Fatou 引理,

$$\mathbb{P}(D) \leq \sum_{c=1}^{\infty} \mathbb{P}(\lim_n D_n) \leq \sum_{c \geq 1} \lim_n \mathbb{P}(D_n) = 0.$$

这说明几乎所有样本轨道无处可导. □

因为任何处处不可导的函数在任何区间上都不是有界变差的, 所以布朗运动的几乎所有轨道在任何区间上都不是有界变差的. 这说明布朗运动的轨道是非常粗糙的, 任何一段都不会单调, 任何一段的长度都是无穷. 因此人的直觉无法想象它是怎样的粗糙.

**练习 5.4.4** 求下面三个随机变量的期望方差.

$$(1) \int_0^1 B_t dt, (2) \int_0^1 B_t^2 dt, (3) \exp \left( \int_0^1 B_t dt \right).$$

**练习 5.4.5** 证明: 当  $[0, 1]$  上的分划  $D$  趋于零时, Riemann 和  $\sum_i t_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$  几乎处处收敛于某个随机变量  $\xi$ . 求  $\xi$  的分布.

## 5.5 马氏性及其应用

泊松过程与布朗运动都是平稳独立增量过程, 平稳独立增量过程有马氏性. 设有概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 流的定义与离散时间类似, 它就是  $\mathcal{F}$  的一个递增的子  $\sigma$ -代数族  $(\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ . 设  $X = (X_t)$  是随机过程. 对于任何的  $t > 0$ , 定义  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ , 则  $(\mathcal{F}_t)$  是一个流, 称为  $X$  的自然流, 通常我们将零概率集加入自然流重新生成流, 称为强化的自然流.

**定理 5.5.1** 设  $X$  是从零出发. 则它是平稳独立增量过程当且仅当对于任何的  $s > 0$ , 过程  $X'_t := X_{t+s} - X_s$ ,  $t \geq 0$ , 是一个与  $\mathcal{F}_s$  独立且与  $X$  同分布的随机过程.

充分性是显然的, 必要性的证明不难, 对任何  $0 < s_1 < \cdots < s_k \leq s$ ,  $0 < t_1 < \cdots < t_n$ , 以及非负可测函数  $f, g$ , 用平稳独立增量性证明

$$\mathbb{E}(f(X_{s_1}, \cdots, X_{s_k})g(X'_{t_1}, \cdots, X'_{t_n})) = \mathbb{E}(f(X_{s_1}, \cdots, X_{s_k}))\mathbb{E}(g(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}))$$

就足够了, 剩下的由单调类方法完成.

**练习 5.5.1** 请完成上述定理的证明.

前面我们用反射原理给出了布朗运动对于  $a \neq 0$  的首中时的分布, 但这个证明是不严格的, 下面我们将给出强马氏性, 然后严格地证明反射原理且证明零点的首中时等于 0, 并由此证明布朗运动轨道的零点集是测度零的完美集. 为此我们先介绍停时的概念. 设  $B = (B_t)$  是标准 Brown 运动, 强化的自然流是  $(\mathcal{F}_t)$ . 定义其右极限流

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u, \quad t \geq 0,$$

这在连续时间情况下非常重要.

**定义 5.5.1** 一个随机时间  $\tau$  称为是  $(\mathcal{F}_t)$ -停时, 如果对任何  $t \geq 0$ , 有  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

显然关于小的流的停时肯定也是大的流的停时. 另外, 注意定义中使用  $\{\tau \leq t\}$  与使用  $\{\tau < t\}$  是完全不同的.

**引理 5.5.1** 对任何  $t \geq 0$ ,  $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$  当且仅当  $\tau$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时.

如果说  $\tau$  表示某个事件发生的时间, 那么停时是说可以用  $t$  时刻前的信息来判断这个事件是否在  $t$  时刻前发生. 直观地, 首次到达某个集合的时间就应该是停时了, 因为  $t$  时刻前的轨道足以判断它是否碰到过这个集合, 而最后一次到达某集合的



时间应该不是停时, 因为  $t$  时刻前的轨道无法判断是否是最后. 下面我们证明强马氏性, 注意强马氏性不仅用停时代替时间, 还用右极限流代替自然流. 设  $T$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时, 定义

$$\mathcal{F}_{T+} := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \text{对任何 } t \geq 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

**练习 5.5.2** 证明: (1)  $\mathcal{F}_{T+}$  是  $\sigma$ -代数; (2) 若  $T \equiv t$ , 则  $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$ . (2)  $T$  是  $\mathcal{F}_{T+}$  可测的.

**定理 5.5.2** 对任何  $(\mathcal{F}_{t+})$  有限停时  $T$ , 令  $B'_t := B_{t+T} - B_T$ ,  $t \geq 0$ . 则  $B' = (B'_t, t \geq 0)$  是一个与  $\mathcal{F}_{T+}$  独立的标准布朗运动.

证明. 设  $T_n$  是  $T$  的离散化, 即

$$T_n := \sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^n} 1_{\{(k-1)/2^n \leq T < k/2^n\}}.$$

则  $\{T_n = k/2^n\} \in \mathcal{F}_{k/2^n}$ . 取  $A \in \mathcal{F}_{T+}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(B_{t+T_n} - B_{T_n}), A] &= \sum_k \mathbb{E}[f(B_{t+k/2^n} - B_{T_n}), A \cap \{T_n = k/2^n\}] \\ &= \mathbb{E}[f(B_t)] \sum_k \mathbb{P}(A \cap \{T_n = k/2^n\}) = \mathbb{E}[f(B_t)] \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

让  $f$  连续且让  $n$  趋于无穷得  $\mathbb{E}[f(B'_t), A] = \mathbb{E}[f(B_t)] \mathbb{P}(A)$ . 同理对任何  $0 < t_1 < \cdots < t_n$  与连续函数  $f$  有

$$\mathbb{E}[f(B'_{t_1}, \dots, B'_{t_n}), A] = \mathbb{E}[f(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})] \mathbb{P}(A).$$

最后用单调类方法推出对任何  $C \in \mathcal{B}^T$ ,  $\mathbb{P}(\{B' \in C\} \cap A) = \mathbb{P}(\{B \in C\}) \mathbb{P}(A)$ . 完成证明.  $\square$

为了应用强马氏性讨论反射原理, 我们自然需要证明首中时是停时, 这在离散时间场合几乎不是问题, 但在这里却确实是个问题. 对于任何  $A \subset \mathbf{R}$ , 定义  $A$  的首中时

$$\tau_A(\omega) := \inf\{t > 0 : B_t(\omega) \in A\}. \quad (5.5.1)$$

遗憾的时, 如此定义的首中时一般不是停时, 确切地说, 不是  $(\mathcal{F}_t)$  停时. 事实上, 如果它是, 那么  $\{\tau_A = 0\} \in \mathcal{F}_0 = \sigma(B_0)$ , 即它是否发生由  $B_0$  决定. 按照首中时的定义,

这显然不对, 所以  $\tau_A$  一般不可能是  $(\mathcal{F}_t)$  停时. 但是它很可能是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时, 因为  $\tau_A < t$  等价于存在  $s < t$  使得  $B_s \in A$ , 然后利用轨道的连续性, 该事件由可列稠子集决定, 所以它可能是  $\mathcal{F}_t$  可测的. 我们有下面的结果.

**定理 5.5.3** 如果  $A$  是开集或者闭集, 那么  $\tau_A$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时.

证明. 因流是强化的, 不妨假设样本轨道总是连续的. 如果  $A$  是开集, 事情比较简单. 因为对于连续的轨道,  $\tau_A < t$  当且仅当存在一个有理数  $r < t$  使得  $B_r(\omega) \in A$ . 因此

$$\{\tau_A < t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r < t} \{B_r \in A\},$$

而后者是一个  $\mathcal{F}_t$  中集合的可列并, 故  $\{\tau_A < t\} \in \mathcal{F}_t$ , 因此它是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时.

闭集的情况要复杂一些, 我们先验证对任何的  $r \geq 0$ , 进入时

$$T := \inf\{t \geq r : B_t \in A\}$$

是  $(\mathcal{F}_t)$  停时. 因为  $A$  是闭集且轨道连续, 所以轨道在  $T$  时的位置  $B_T$  一定在  $A$  中. 不妨设  $r \in \mathbb{Q}$ . 当  $t \geq r$  时,  $T \leq t$  等价于  $\{B_s : r \leq s \leq t\}$  与  $A$  相交, 再等价于  $\{B_s : r \leq s \leq t, s \in \mathbb{Q}\}$  与  $A$  的距离等于零, 即

$$\{T \leq t\} = \left\{ \inf_{s \in [r, t] \cap \mathbb{Q}} d(B_s, A) = 0 \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

因此  $T$  是  $(\mathcal{F}_t)$  停时. 记  $T_n := \inf\{t \geq 1/n : B_t \in A\}$ , 这是一个  $(\mathcal{F}_t)$  的递减停时列且趋于  $\tau_A$ . 最后我们证明  $\tau_A$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时. 事实上  $\tau_A < t$  当且仅当存在  $n$  使得  $T_n < t$ .<sup>1</sup> 因而有  $\{\tau_A < t\} \in \mathcal{F}_t$ , 即  $\tau_A$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时.  $\square$

现在设  $a > 0$ , 则  $\tau = T_{\{a\}}$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时, 由强马氏性,  $B'_t := B_{\tau+t} - B_\tau = B_{\tau+t} - a$ ,  $t \geq 0$  是与  $\tau$  独立的标准布朗运动. 因此

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t > a) &= \mathbb{P}(\tau < t, B_t > a) = \mathbb{P}(\tau < t, B'_{t-\tau} > 0) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(s < t, B'_{t-s} > 0) | s = \tau) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau < t). \end{aligned}$$

这里第三个等号应用 Fubini 定理, 见 §1.1 练习.

<sup>1</sup>注意这里  $<$  换成  $\leq$  结论不对.

前面已经看到布朗运动的几乎所有轨道是连续但处处不可导的, 下面我们讨论布朗运动轨道的零点集, 它定义为

$$Z(\omega) := \{t : B_t(\omega) = 0\},$$

这是一个随机的集合.

**定理 5.5.4** 对几乎所有轨道,  $Z$  是闭的没有孤立点且测度为零的集合.

因为 Brown 运动的几乎所有轨道连续, 所以对几乎所有轨道  $Z$  是闭集. 然后我们来算  $Z$  的测度  $|Z|$ , 这是个随机变量, 用 Fubini 定理得

$$\mathbb{E}|Z| = \mathbb{E} \int 1_{\{B_t=0\}} dt = \int \mathbb{P}(B_t = 0) dt = 0,$$

推出几乎所有轨道的零点集是零测度的闭集, 所以  $Z$  实际上是无处稠的. 最后我们要证明几乎所有轨道的  $Z$  没有孤立点. 但证明很是不易. 首先来证明对于几乎所有轨道,  $0$  是  $Z$  的极限点. 这等价于  $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 1$ .

因为  $\tau_0$  是  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时, 所以  $\{\tau_0 = 0\} \in \mathcal{F}_{0+}$ . 下面我们证明  $\mathcal{F}_{0+}$  中的事件是平凡的, 概率是  $0$  或者  $1$ .

在强马氏性定理中, 特别地, 令  $T$  恒等于  $0$ , 则  $B' = B$ , 上式推出  $\mathcal{F}_\infty$  与  $\mathcal{F}_{0+}$  独立, 说明  $\mathcal{F}_{0+}$  是平凡的.

**定理 5.5.5** 对任何  $(\mathcal{F}_{t+})$  停时  $T$ ,  $\mathbb{P}(T = 0)$  非  $0$  即  $1$ .

对任何  $t > 0$  有  $\mathbb{P}(\tau_{(0,\infty)} > t) \leq \mathbb{P}(B_t \leq 0) = 1/2$ , 推出  $\mathbb{P}(\tau_{(0,\infty)} = 0) = 1$ . 同理  $\mathbb{P}(\tau_{(-\infty,0)} = 0) = 1$ . 由轨道连续性得  $\mathbb{P}(\tau_0 = 0) = 1$ .

下面我们证明布朗运动在任何两个不同的正实数  $a < b$  之间只有一个零点的概率为零, 即

$$\mathbb{P}(Z \cap (a, b) \text{ 仅有一个点}) = 0.$$

事实上, 假设在  $(a, b)$  有一个零点. 这时  $T = \inf\{t > a : B_t = 0\}$  是停时且  $T < b$ ,  $B_T = 0$ , 所以由定理 5.5.2,  $B'_t = B_{t+T}$  是一个标准布朗运动. 它的几乎所有轨道在  $t = 0$  的右侧有无穷多零点, 即  $B$  在  $T$  的右侧一定有无穷多零点. 这证明了上面的结论.

如果  $Z$  有孤立点, 那么必然存在两个有理数  $a, b$  使得  $Z$  与  $(a, b)$  仅有一个交点, 即

$$\{Z \text{ 有孤立点}\} \subset \bigcup_{a, b \in \mathbb{Q}} \{Z \cap (a, b) \text{ 仅有一个点}\}.$$

右边是可列个概率零集的并, 所以概率还是零.

## 5.6 鞅性质及其应用

在这一节中, 我们将讨论 Brown 运动的鞅性质.

**定义 5.6.1** 给定概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , 和流  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

1. 一个随机过程  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  称为适应于流  $(\mathcal{F}_t)$ , 如果对任何  $t \geq 0$ , 有  $X_t$  关于  $\mathcal{F}_t$  可测.
2. 一个可积的随机过程  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  称为是关于流  $(\mathcal{F}_t)$  的鞅, 如果  $X$  适应于  $(\mathcal{F}_t)$ , 且对任何  $t > s \geq 0$  有  $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ .

显然, 关于同一个流的鞅是个线性空间. 一个关于某个流是鞅的随机过程一定关于其自然流是鞅. 在本节中, 当我们讨论布朗运动时, 相关的流是指它的自然流.

**定理 5.6.1** (1) 布朗运动  $(B_t)$  是鞅; (2) 随机过程  $B_t^2 - t, t \geq 0$ , 是鞅.

证明. 从上一节开头的定理知道, 独立增量性蕴含着对于  $t > s > 0$ ,  $B_t - B_s$  与  $\mathcal{F}_s$  独立, 所以  $\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = 0$ . 这是第一个结论. 证明第二个结论,  $B_t^2 - t$  可积且关于  $(\mathcal{F}_t)$  也是适应的, 然后

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 - B_s^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(2B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) + 2B_s \mathbb{E}((B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = t - s \end{aligned}$$

故而  $\mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_s^2 - s | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s$ , 这证明了  $B_t^2 - t$  是一个鞅.  $\square$

**定理 5.6.2** 设  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  是  $\mathbb{R}$  上连续随机过程且  $B_0 = 0$ . 那么  $(B_t)_{t \geq 0}$  是一维标准 Brown 运动当且仅当对任何  $\xi \in \mathbb{R}$  与  $t > s$

$$\mathbb{E} \left[ \exp(i\xi(B_t - B_s)) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left( -\frac{(t-s)\xi^2}{2} \right). \quad (5.6.1)$$

因此

$$M_t \equiv \exp \left( i\xi B_t + \frac{\xi^2}{2} t \right)$$

是鞅.

证明. 我们观察到 (5.6.1) 蕴含着  $B_t - B_s$  独立于  $\mathcal{F}_s$  且是方差为  $t - s$  的正态分布. 反过来, 如果  $(B_t)_{t \geq 0}$  是一维标准 Brown 运动, 那么  $B_t - B_s$  独立于  $\mathcal{F}_s$ , 且  $B_t - B_s$  是期望零方差  $t - s$  的正态分布, 故

$$\mathbb{E} \left[ \exp(i\xi(B_t - B_s)) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} [\exp(i\xi(B_t - B_s))] = \exp \left( -\frac{(t-s)\xi^2}{2} \right).$$

由此推出定理的第二个结论.  $\square$

实际上, 下面的等式也成立

$$\mathbb{E} \{ \exp(\xi(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s \} = \exp \left( \frac{(t-s)\xi^2}{2} \right).$$

因此对任何实数  $\xi$ ,

$$M_t = \exp \left( \xi B_t - \frac{\xi^2}{2} t \right), \quad t \geq 0,$$

是一个连续鞅, 称为布朗运动的指数鞅.

**定理 5.6.3 (Doob)** 如果  $M = (M_t)$  是连续鞅,  $\tau$  是有界停时, 那么  $M_\tau$  可积且

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

这个定理是前面证明过的 Doob-停止定理的连续时间版本, 它的证明却比较复杂和困难, 首次阅读时可以省略. 基本思想如下, 把停时离散化, 也就是说把  $\tau$  写成离散时间上停时列的递减极限, 然后应用离散时间下的 Doob 停止定理以及轨道连续性, 最后期望与极限的交换, 需要  $L^1$  收敛性, 为此需要比控制收敛定理条件更弱的一致可积性条件.

这个定理, 称为 Doob 停止定理, 在处理停时相关问题时非常有用. 但是在应用定理之前, 还有一个沟需要跨越, 细心的读者应该注意到了. Brown 运动是独立增量过程, 所以它以及它的指数鞅都是相对于自然流  $(\mathcal{F}_t)$  的鞅, 但是开集或者闭集的首中时是关于自然流的右极限流  $(\mathcal{F}_{t+})$  的停时, 而 Doob 的停止定理中鞅以及停时被要求是关于同一个流的, 所以还不能被直接使用. 但是根据定理 5.5.2, Brown 运动关于流  $(\mathcal{F}_{t+})$  也是独立增量过程. 这说明前面所涉及的鞅也是关于流  $(\mathcal{F}_{t+})$  的鞅, Doob 停止定理就可以使用了.

**例 5.6.1** 设  $k \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , 定义

$$T_{k,a} := \inf\{t > 0 : B_t = kt + a\},$$

即时空平面上的 Brown 运动首次碰到直线  $y = kt + a$  的时间, 或者漂移 Brown 运动  $(B_t - kt)$  首次碰到点  $a$  的时间. 当  $k = 0$  时, 它就是  $a$  的首中时  $\tau_a$ . 当  $k \geq 0$  时, 我们来证明

$$\mathbb{P}(T_{k,a} < \infty) = 1$$

并计算它的 Laplace 变换.

利用 Brown 运动的数鞅, 应用 Doob 定理

$$\mathbb{E} \left[ \exp(xB_{T_{k,a} \wedge n} - \frac{1}{2}x^2(T_{k,a} \wedge n)) \right] = 1, \quad (5.6.2)$$

当  $x > 0$  时  $xB_{T_{k,a} \wedge n}$  上有界, 当  $n$  趋于无穷时应用控制收敛定理得

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( xB_{T_{k,a}} - \frac{1}{2}x^2T_{k,a} \right) 1_{\{T_{k,a} < \infty\}} \right] = 1,$$

然后让  $x \downarrow 0$ , 再用控制收敛定理得  $\mathbb{P}(T_{k,a} < \infty) = 1$ . 这时显然有  $B_{T_{k,a}} = kT_{k,a} + a$ , 因此

$$\mathbb{E} \left( e^{-(\frac{1}{2}x^2 - kx)T_{k,a}} \right) = e^{-xa},$$

令  $\frac{1}{2}x^2 - kx = s > 0$ ,  $x$  有正解  $x = k + \sqrt{k^2 + 2s}$ , 故而有

$$\mathbb{E} [e^{-sT_{k,a}}] = \exp(-(k + \sqrt{k^2 + 2s})a).$$

当  $k = 0$  时,  $T_{0,a}$  就是  $a$  的首中时  $\tau_a$ , 推出  $\mathbb{E}[e^{-s\tau_a}] = e^{-\sqrt{2s}a}$ . 注意这个方法对  $a = 0$  是无效的.

当  $k > 0$  时, 我们需要知道 Brown 运动是否一定会碰到直线  $y = kt + a$ , 也就是说需要算概率

$$\mathbb{P}(T_{k,a} < \infty).$$

方程 (5.6.2) 依然成立, 但是现在当  $n$  趋于无穷时不能保证期望内的量的有界性, 因此无法用控制收敛定理, 但是

$$xB_{T_{k,a} \wedge n} \leq x(k(T_{k,a} \wedge n) + a),$$

故而

$$\exp(xB_{T_{k,a} \wedge n} - \frac{1}{2}x^2T_{k,a} \wedge n) \leq \exp(xa + (xk - \frac{1}{2}x^2)(T_{k,a} \wedge n)),$$

那么  $xk - \frac{1}{2}x^2 < 0$ , 也就是说  $x > 2k$  时, 能够保证上面这个量有界了. 让  $n$  趋于无穷, 在  $\{T_{k,a} < \infty\}$  上,  $B_{T_{k,a}} = kT_{k,a} + a$ , 因此有

$$\mathbb{E}[\exp((xk - \frac{1}{2}x^2)T_{k,a}); T_{k,a} < \infty] = e^{-xa},$$

然后让  $x \uparrow 2k$ , 得

$$\mathbb{P}(T_{k,a} < \infty) = e^{-2ka}.$$

练习 5.6.1 继续上例, 证明: 过程  $(T_{k,a} : a > 0)$  是平稳独立增量过程.

例 5.6.2 现在取  $a < 0 < b$ , 令

$$\tau := \tau_{\{a,b\}} = \tau_a \wedge \tau_b,$$

当然  $\tau$  也是停时且有限. 我们先算 Brown 运动先到  $a$  的概率  $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b)$ . 因为  $B = (B_t)$  是鞅, 所以  $\mathbb{E}[B_{\tau \wedge n}] = 0$ , 而  $|B_{\tau \wedge n}| \leq \max(-a, b)$ , 让  $n$  趋于无穷, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[B_\tau] = a\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) + b\mathbb{P}(\tau_a > \tau_b), \\ \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b) &= \frac{b}{b-a}. \end{aligned}$$

再算  $\tau$  的期望, 那需要利用  $(B_t^2 - t)$  是鞅的事实, 得  $\mathbb{E}[B_{\tau \wedge n}^2] = \mathbb{E}[\tau \wedge n]$ , 还是应用控制收敛定理

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tau] &= \mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[B_\tau^2; \tau_a < \tau_b] + \mathbb{E}[B_\tau^2; \tau_a > \tau_b] \\ &= a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{-a}{b-a} = -ab. \end{aligned}$$

练习 5.6.2 继续上例 (1) 结合强马氏性求  $\mathbb{P}(\tau_1 < \tau_{-1} < \tau_2)$ . (2) 求  $\mathbb{E}(e^{-s\tau})$ .

## 参考文献

- [1] Bremaud, MARKOV CHAINS
- [2] Doyle, P.G., Snell, J.L., RANDOM WALKS AND ELECTRIC NETWORKS, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
- [3] Feller, W., PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATION, Vol. I(1959: Third edition), Vol. II(1970), Wiley & Son
- [4] Lyons, R., PROBABILITY ON TREES AND NETWORKS, Probability web. 2003
- [5] Shreve, S., STOCHASTIC CALCULUS AND FINANCE I: THE BINOMIAL ASSET PRICING MODEL, Springer 2004
- [6] 应坚刚, 何萍, 概率论 (第 2 版第 3 次印刷), 复旦大学出版社, 上海, 2024
- [7] 应坚刚, 随机过程基础 (第 3 版), 复旦大学出版社, 上海, 2024